Université de Batna 2
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

28-03-2021

Application des Mathématiques en Biologie
Examen final

Considérer le problème de contrôle optimal suivant

$$\max_{u} \int_{t_0}^{t_1} (u(t)y(t) - (u(t))^2 - (y(t))^2)dt$$

où $y(.)$ est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + u(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Résoudre le problème pour
(i) $t_0 = 1, t_1 = 5, y_0 = 2,$
(ii) $t_0 = 1, t_1 = 3, y_0 = 2.$
Pour $t_0 = 3, t_1 = 5$, quelle est la valeur de y_0 pour laquelle le principe d'optimalité guarantit la coincidence de la solution du problème de contrôle optimal correspondant avec celle de (i)?

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} \left(u(t)y(t) - (u(t))^2 - (y(t))^2\right) dt$$

où $y(\cdot)$ est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + u(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Le hamiltonien est donné par

$$H(t, y, \lambda, u) = uy - u^2 - y^2 + \lambda(y + u)$$

Condition d'optimalité

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow y - 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\lambda$$

L'équation adjointe

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = -(u - 2y + \lambda)$$
$$= -u + 2y - \lambda$$

y et λ sont solutions de

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\lambda & (1) \\ \lambda' = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\lambda & (2) \end{cases}$$

Dérivons l'équation (1) par rapport à t, on obtient

$$y'' = \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}\lambda'$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\lambda\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\lambda\right)$$
$$= \frac{9}{4}y + \frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}y$$
$$= 3y$$

(1)

où
$$y'' - 3y = 0$$
L'équation caractéristique est
$$r^2 - 3 = 0$$
Alors $\quad y(t) = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}$,

c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

De l'équation ②, on a
$$\begin{aligned}\lambda &= 2y' - 3y \\ &= 2c_1\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - 2c_2\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} - 3c_1 e^{\sqrt{3}t} - 3c_2 e^{-\sqrt{3}t} \\ &= (2\sqrt{3}-3)c_1 e^{\sqrt{3}t} - (2\sqrt{3}+3)c_2 e^{-\sqrt{3}t}\end{aligned}$$
y et λ sont alors données par
$$\begin{cases} y = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} \\ \lambda = (2\sqrt{3}-3)c_1 e^{\sqrt{3}t} - (2\sqrt{3}+3)c_2 e^{-\sqrt{3}t} \end{cases}$$

i) Cas $y(1) = 2$, $\lambda(5) = 0$

$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{3}} + c_2 e^{-\sqrt{3}} = 2 \\ (2\sqrt{3}-3)c_1 e^{5\sqrt{3}} - (2\sqrt{3}+3)c_2 e^{-5\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$$
On résoud ce système algébrique, on trouve
$$c_1 = \frac{2}{e^{\sqrt{3}} + (7-4\sqrt{3})e^{9\sqrt{3}}}, \quad c_2 = \frac{2(7-4\sqrt{3})e^{10\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{3}} + (7-4\sqrt{3})e^{9\sqrt{3}}}$$

ii) Cas $y(1) = 2$, $\lambda(3) = 0$

$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{3}} + c_2 e^{-\sqrt{3}} = 2 \\ (2\sqrt{3}-3) c_1 e^{3\sqrt{3}} - (2\sqrt{3}+3) e^{-3\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$$

On trouve

$$c_1 = \frac{2}{e^{\sqrt{3}} + (7-4\sqrt{3}) e^{5\sqrt{3}}}, \quad c_2 = \frac{2(7-4\sqrt{3}) e^{6\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{3}} + (7-4\sqrt{3}) e^{5\sqrt{3}}}$$

Pour $t_0 = 3$, $t_1 = 5$, la valeur de y_0 pour laquelle le principe d'optimalité guarantit la coincidence de la solution du problème de contrôle optimal correspondant avec celle de (i) est

$$y_0 = y(3)$$
$$= c_1 e^{3\sqrt{3}} + c_2 e^{-3\sqrt{3}}$$

avec c_1 et c_2 ~~ayant~~ les valeurs trouvés dans le cas (i).