Chapitre I.

Variétés différentiables

1.1. Variétés topologiques

1.1.1. Def Une variété topologique M est un espace topologique séparé possédant la propriété suivante :
Tout point $p \in M$ a un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1.2. Def Une carte pour une variété topologique M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

1.1.3. Def Un atlas pour une variété topologique M est un ensemble $\{(U_i, \varphi_i) ; i \in I\}$ tq
I est un ensemble dénombrable et $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

1.1.4. Exemples

Exemple 1 $A = \{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ où $Id_{\mathbb{R}^n}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, est un atlas pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique.

Exemple 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.
On munit E d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel, c.à.d. les applications
$$E \times E \longrightarrow E \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x+y \qquad\qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda . x$$
sont continues

Soit $\mathcal{A} = \{(E, \varphi)\}$

où $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \longrightarrow \varphi(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

φ est bijective et

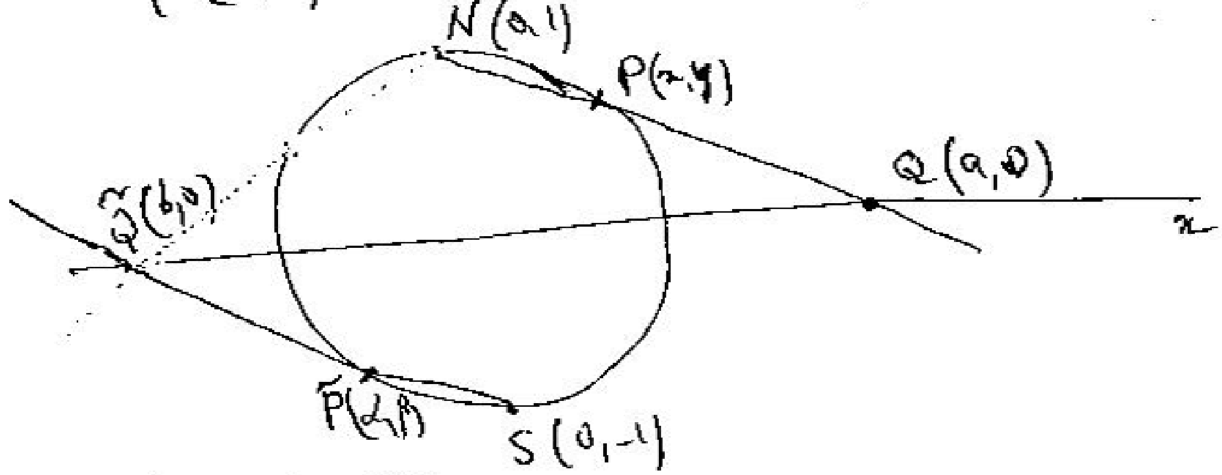
$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \varphi^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

φ est un homéomorphisme et donc $\mathcal{A}$ est un atlas pour E et E est une variété topologique.

Exemple 3

Soit $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



Soient $U_N = S^1 \setminus N$ et $U_S = S^1 \setminus S$

$\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_N(x,y) = \dfrac{x}{1-y}$

$P \longrightarrow \varphi_N(P) = Q$

$\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_S(\alpha, \beta) = \dfrac{\alpha}{1+\beta}$

$\tilde{P} \longrightarrow \varphi_S(\tilde{P}) = \tilde{Q}$

$\varphi_N^{-1}(a) = \left(\dfrac{2a}{1+a^2}, \dfrac{a^2-1}{1+a^2}\right), \quad \varphi_S^{-1}(b) = \left(\dfrac{2b}{1+b^2}, \dfrac{1-b^2}{1+b^2}\right)$

φ_N et φ_S sont des homéomorphismes, $\mathcal{A}$ est donc un atlas pour S^1 et S^1 est une variété topologique

1.1.5. Dimension d'une variété topologique

Soit M une variété topologique, alors tout point $p \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Généralement l'exposant n dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas unique, et s'il est unique on l'appelle la dimension de la variété topologique. Un condition suffisante pour que n soit unique est que la variété M soit connexe.

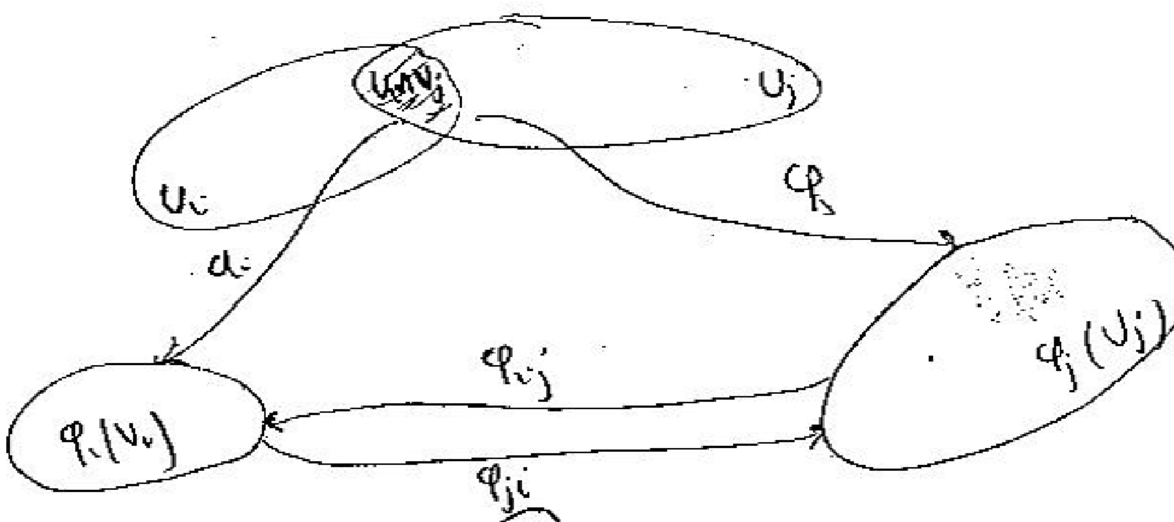
1.1.6. Applications de changement de coordonnées

<u>Def</u> Soit $p \in M$. Alors il existe une carte (U, φ) de M tq U est un voisinage ouvert de p, et $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, donc $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$. $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés les coordonnées locales de p.

<u>Def</u> Soient (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) deux cartes de M tq $U_i \cap U_j = \phi$. On définit l'application

$$\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$$



φ_{ij} et φ_{ji} sont appelées les applications de changement de coordonnées.

Soit $p \in U_i \cap U_j$.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées locales de p définies par φ_i, et $y_1, \dots, y_n$ les coordonnées locales définies par φ_j, alors

$$\varphi_{ij}(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

1.2. Variétés différentiables

Dans tout ce qui suit M est une variété topologique de dimension n.

1.2.1. Def. Deux cartes de M, (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont dites compatibles si

$$U_i \cap U_j = \varphi$$

ou si les applications φ_{ij} et φ_{ji} sont différentiables.

1.2.2. Def. Un atlas de M $A = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ est dit différentiable si les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles pour tous $i, j \in I$.

1.2.3. Def. et Prop.

On définit une relation sur l'ensemble des atlas différentiables de M. Soient A_1 et A_2 deux atlas de M alors

$$A_1 \sim A_2 \iff A_1 \cup A_2 \text{ est un atlas différentiable.}$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

1.2.4. Def

Une structure différentiable sur M est une classe d'équivalence de la relation $\sim$.

1.2.5. Def Une variété différentiable M est une variété topologique muni d'une structure différentiable.

1.2.6 Exemples

Exemple 1 Soit $M = \mathbb{R}$ et soit $A = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$ un atlas de M où $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x$

Alors A définit une structure différentiable sur M.

Exemple 2 Soient $M = \mathbb{R}$ et $A_1 = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$
où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^3$

A_1 aussi définit une structure différentiable sur M.

A et A_1 sont-ils équivalents ? c.a.d les cartes $(\mathbb{R}, \psi)$ et $(\mathbb{R}, \varphi)$ sont-elles compatibles ?

On a
$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \varphi(\psi^{-1}(x)) = \varphi(x) = x^3$$
$$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x}$$

$\psi \circ \varphi^{-1}$ n'est pas dérivable au pt 0, donc les deux cartes ne sont pas compatibles et par conséquent A et A_1 ne sont pas équivalents, c.a.d
$$(\mathbb{R}, A) \neq (\mathbb{R}, A_1).$$

Exemple 3 (Voir 1.1.4, Exemple 3)

$M = S^1$, $\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$

$U_N \cap U_S = S^1 \setminus \{N, S\}$, $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^*$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \varphi_S(U_N \cap U_S)$$
$$x \longrightarrow \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

De même $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ et $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^*$

Donc $(S^1, \mathcal{A})$ est une variété différentiable.

1.3. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application.

1.3.1. Def Soient (U, φ) une carte de M et (V, ψ) une carte de N tq $f(U) \subseteq V$

L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_{\psi\varphi}$ est appelée la représentation locale de f par rapport aux cartes (U, φ) et (V, ψ).

Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\
\varphi(U) \arrow[r, "\psi \circ f \circ \varphi^{-1}"'] & \psi(V)
\end{tikzcd}$$

1.3.2. Def Soient $p \in M$, (U, φ) une carte de M tq $p \in U$ et (V, ψ) une carte de N tq $f(U) \subseteq V$.

On dit que f est différentiable au pt p si $f_{\psi\varphi}$ est différentiable au pt $\varphi(p)$.

1.3.3. Prop. La définition 1.3.2. est indépendante du choix des cartes.

Preuve Soient (U_1, φ_1) une autre carte de M compatible avec la carte (U, φ) tq $p \in U_1$ et (V_1, ψ_1) une autre carte de N compatible avec (V, ψ) tq $f(U_1) \subseteq V_1$.

On a

$$f_{\psi_1\varphi_1}(\varphi_1(p)) = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(p))$$

$$= \psi_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(p))$$

et donc $f_{\psi_1\varphi_1}$ est différentiable au pt $\varphi_1(p)$ comme composition d'applications différentiables

1.4. Sous-variété

1.4.1. Def Soit M une variété différentiable de dimension m et soit B un sous-ensemble de M. B est dite une sous-variété de dimension $k \leq m$ si pour tout point $b \in B$, il existe une carte (U, φ) de M tq $b \in U$ et

$$\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times 0_{m-k}$$

où $\mathbb{R}^k \times O_{m-k} = \{(x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k})\}$

<u>1.4.2. Théorème</u> Soit $A = \{(U_i, \varphi_i) ; i \in I\}$ un atlas de M.

Soit

$$A_B = \{ (U, \varphi) \in A : \varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times O_{m-k}$$

Alors A_B est un atlas pour B et munit B d'une structure de variété différentiable

<u>Preuve:</u> Exercice.