1.5. Espace Tangent

Soit M une variété différentiable de dimension m.

1.5.1. Def Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0.
Une courbe différentiable sur M passant par p est une application différentiable $c : J \longrightarrow M$ tq $c(0) = p$.

1.5.2 Def Soit J_1 et J_2 deux intervalles ~~de $\mathbb{R}$~~ ouverts de $\mathbb{R}$ tq $0 \in J_1 \cap J_2$. Soient ~~[illegible]~~ $c_1 : J_1 \longrightarrow M$ et $c_2 : J_2 \longrightarrow M$ deux courbes différentiables sur M.
On définit une relation entre les courbes différentiables sur M comme suit:

$$c_1 \sim_p c_2 \iff \begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = p \\ D(\varphi \circ c_1)(0) = D(\varphi \circ c_2)(0) \end{cases}$$

où (U, φ) est une carte de M tq $p \in U$.

Exercices

1. Montrer que la relation $\sim_p$ est indépendante du choix des cartes.
2. Montrer que la relation $\sim_p$ est une relation d'équivalence.

1.5.3. Def Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de la relation d'équivalence $\sim_p$.
L'ensemble des vecteurs tangents, appelé espace tangent, est noté T_pM.
On montre ci-dessous qu'on peut munir d'une structure d'espace vectoriel, l'espace tangent T_pM.

1.5.4. Proposition Soit (V,φ) une carte de M tq $p \in V$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\theta_\varphi : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [c] &\longrightarrow \theta_\varphi([c]) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0)\end{aligned}$$

est une bijection.

Preuve

θ_φ est injective :

$$\begin{aligned}\theta_\varphi([c_1]) = \theta_\varphi([c_2]) &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi\circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ c_2)(0) \\ &\Leftrightarrow D(\varphi\circ c_1)(0)(1) = D(\varphi\circ c_2)(0)(1) \\ &\Leftrightarrow D(\varphi\circ c_1)(0) = D(\varphi\circ c_2)(0) \\ &\Leftrightarrow c_1 \sim_p c_2 \\ &\Leftrightarrow [c_1] = [c_2].\end{aligned}$$

θ_φ est surjective

Soit $v \in \mathbb{R}^m$, alors v est l'image par l'application θ_φ de la classe d'equivalence de la courbe

$$\gamma : t \longmapsto \varphi^{-1}(tv + (\varphi\circ c)(0))$$

En fait, on a $\gamma(0) = p$

et $\frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma)(0) = v$. ∎

1.5.5. Def Soient $\xi, \eta \in T_pM$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit sur T_pM les opérations $+$ et $.$ comme suit

$$\begin{aligned}\xi + \eta &\overset{def}{=} \theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(\xi) + \theta_\varphi(\eta)) \\ \lambda.\xi &\overset{def}{=} \theta_\varphi^{-1}(\lambda\,\theta_\varphi(\xi)).\end{aligned}$$

Exercice

Montrer que les définitions de la loi $+$ et la loi $.$ sont indpdt du choix des cartes

1.5.6. Proposition

$(T_pM,+,\cdot)$ est un espace vectoriel de dimension m.

Preuve: Exercice.

1.6. Différentielle d'une application

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.
Soient $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.
Alors il existe une carte (U,φ) de M tq $p \in U$ et une carte (V,ψ) de N tq $f(U) \subseteq V$ et tq l'application $f_{\psi\varphi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable au pt $\varphi(p)$. Par conséquent l'application

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est bien définie et linéaire.
Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\theta_\psi"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

1.6.1. Def

L'application $\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi$ notée $Df(p)$ est appelée la différentielle de f au pt p.

1.6.2. Lemme

La définition 1.6.1 est indpdt du choix des carte.

Preuve

Soient (U_1, φ_1) une carte compatible avec (U, φ) tq $p \in U_1$ et (V_1, ψ_1) une carte de N compatible avec (V, ψ) tq $f(U_1) \subseteq V_1$ et on montre que

$$\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi =$$
$$\theta_{\psi_1}^{-1} \circ D(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) \circ \theta_{\varphi_1}$$

On a

$$\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi =$$
$$\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi =$$
$$\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ \psi_1^{-1})(\psi_1(f(p))) \circ D(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) \circ D(\varphi_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi$$
$$= \theta_{\psi_1}^{-1} \circ D(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) \circ \theta_{\varphi_1}$$

car $\theta_\psi^{-1} \circ D(\psi \circ \psi_1^{-1})(\psi_1(f(p))) = \theta_{\psi_1}^{-1}$ (Exercice).

et $D(\varphi_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \theta_\varphi = \theta_{\varphi_1}$

1.6.3. Théorème

Soient M, N et Q trois variétés différentiables de dimension m, n et q respectivement.

Soient $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow Q$ deux applications différentiables.

Alors $g \circ f$ est différentiable et pour tout $p \in M$

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p).$$

Preuve Exercice.

1.6.4. Def

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.
Soit $f: M \longrightarrow N$ une application.
f est dit difféomorphisme si f est une bijection et si f et f^{-1} sont différentiables.

1.6.5. Théorème

Soit $f: M \longrightarrow N$ un difféomorphisme.
Alors pour $p \in M$, $Df(p): T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ est un ~~difféo~~ isomorphisme d'e.v., et par conséquent $\dim M = \dim N$.

Preuve

Il existe une application différentiable

$$g: N \longrightarrow M \text{ tq } f \circ g = 1_N \text{ et } g \circ f = 1_M$$

Alors pour $p \in M$, on a d'une part

$$D(g \circ f)(p) = 1_{T_pM}$$

et d'autre part

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$$

On a aussi $D(f \circ g)(f(p)) = 1_{T_{f(p)}N}$

et $D(f \circ g)(f(p)) = Df(p) \circ Dg(f(p))$

Ceci nous permettra de conclure que $Df(p)$ est inversible et

$$(Df(p))^{-1} = Dg(f(p))$$

D'où $Df(p)$ est un isomorphisme d'e.v. et par conséquent $\dim M = \dim T_pM = \dim T_{f(p)}N = \dim N$

1.7. Valeurs régulières

1.7.1. Def Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, et soit $x \in N$.

x est dit valeur régulière de f si l'application $Df(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ est surjective pour tout $p \in P = f^{-1}(x)$

où $f^{-1}(x) = \{p \in M : f(p) = x\}$.

On convient que tout $x \notin f(M)$ est "valeur régulière".

1.7.2 Théorème

Supposons que x est une valeur régulière de f, alors

i) $P = f^{-1}(x)$ est une sous-variété de M.

ii). $T_pP = \ker Df(p)$

iii) $\dim P = \dim M - \dim N$.

1.7.3 Exemple

Utilisons le théorème 1.7.2. pour montrer que $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Considérons l'application

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

Remarquons que $S^n = f^{-1}(1)$.

Montrons que 1 est une valeur régulière de f, c.a.d montrons que l'application

$$Df(p) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est surjective pour tout $p \in S^n$

On a $Df(p)h = 2\sum_{i=1}^{n+1} p_i h_i$

et pour $h = p$, $Df(p) = 2\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 2 \neq 0$

Alors $Df(p)$ n'est pas l'application nulle et comme $\dim \mathbb{R} = 1$, on conclut que $Df(p)$ est surjective.

D'après le théorème 1.7.2, S^n est une sous-variété de dimension n et

$$T_pS^n = \ker Df(p)$$
$$= \{ h \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, h \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0 \}$$