Chapitre 2 Champs de vecteurs

A travers ce chapitre, M est une variété différentiable de dimension m.

2.1. Fibré tangent

2.1.1. Def Le fibré tangent à M, noté TM, est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M, c.a.d.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$
$$= \bigcup_{p \in M} \{(p,v) \, ; \, v \in T_pM\}$$
$$= \{(p,v) : p \in M \text{ et } v \in T_pM\}.$$

2.1.2. Remarque
Si $p_1 \neq p_2$ alors $T_{p_1}M \cap T_{p_2}M = \emptyset$

2.1.3. Def L'application $\pi : TM \longrightarrow M$
$(p,v) \longrightarrow p$

est appelée projection.

2.1.4. Proposition Le fibré tangent TM est une variété différentiable de dimension $2m$.

Preuve
Soit $p \in M$. Alors il existe une carte (U_i, φ_i) tq $p \in U_i$ un ouvert de M et $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme.
Donc $D\varphi_i(p) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme pour chaque $p \in U_i$.

Ceci nous permet de définir l'application

$$\tilde{\varphi}_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

par $\tilde{\varphi}_i(p,v) = (\varphi_i(p), D\varphi_i(p)v)$

On ~~définit~~ utilise ces applications pour définir une topologie et une structure différentiable sur TM.

Un sous-ensemble $A \subset TM$ est ouvert si $\tilde{\varphi}_i(A \cap \pi^{-1}(U_i))$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{2m}$ pour chaque i.

Ces applications sont des homéomorphismes entre les ouverts de TM et ceux de $\mathbb{R}^{2m}$. Donc $(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)$ sont des cartes pour TM.

Les applications de changement de coordonnées sont données par

$$\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

$$(\xi, w) \longrightarrow (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\xi), D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\xi)(w))$$

et elles sont différentiables. ∎

2.1.5 Exemples

i) $T\mathbb{R}^m$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

ii) TS^1 est difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$.

2.2 Champs de vecteurs

2.2.1. Def. Un champ de vecteurs sur M est une application différentiable $V: M \longrightarrow TM$ tq $\pi \circ V = Id_M$ (identité de M dans M), et par conséquent le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & TM \arrow[dr, "\pi"] & \\
M \arrow[ur, "V"] \arrow[rr, "Id_M"'] & & M
\end{tikzcd}$$

Alors pour $p \in M$, $V(p) \in T_pM$.

2.2.2. Exemple

Pour $p \in U$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $V(p) \in T_pU = T_p\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$, donc on peut considérer V comme une application différentiable de U dans $\mathbb{R}^n$.

2.2.3 Courbe intégrale d'un champ de vecteurs

Soient J un intervalle de ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et $c: J \longrightarrow M$ une courbe différentiable dans M. Alors $Dc(t): \mathbb{R} \longrightarrow T_{c(t)}M$

Posons $c'(t) = Dc(t)(1)$
C'est le vecteur tangent à M le long de la courbe c.

2.2.3.1. Def Une courbe intégrale d'un champ de vecteurs V sur M à travers $p \in M$ est une courbe différentiable $c : J \longrightarrow M$

tq
$$\begin{cases} c(0) = p \\ c'(t) = V(c(t)) \end{cases}$$

2.2.3.2. Théorème Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un champ de vecteurs sur U. Alors pour chaque $p \in U$, il existe une courbe intégrale de V passant par p, c.a.d qu'il existe une courbe différentiable

$$c : J \longrightarrow M \quad \text{tq} \quad \begin{cases} c(0) = p \\ c'(t) = V(c(t)) \end{cases}$$

J est un intervalle ouvert contenant 0.

Si $c_1 : J_1 \longrightarrow M$ est une autre courbe intégrale de V passant par p alors $c_1(t) = c_2(t)$ pour $t \in J_1 \cap J$.

Preuve Exercice.

2.2.3.3. Exemples

Exemple 1 Soit V un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ défini par

$$V : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow V(x,y) = (1,0)$$

Les courbes intégrales sont solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

ainsi $\quad x(t) = t + A, \; y(t) = B \quad (A, B \text{ cst}).$

et la courbe intégrale de V à travers un pt donné (x_0, y_0) est $\quad x(t) = t + x_0, \; y(t) = y_0$

<u>Exemple 2</u> $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longrightarrow (e^{-x}, 0)$$

Les courbes intégrales sont solutions du système

$$e^{x(t)} x'(t) = 1 , \quad y'(t) = 0$$

Ainsi

$$e^{x(t)} = x(t) + A , \quad y(t) = B$$

et donc

$$x(t) = \log (x(t) + A) , \quad y(t) = B$$

La courbe intégrale de M à travers (x_0, y_0) est

$$x(t) = \log (t + e^{x_0}) , \quad y(t) = y_0$$

et cette courbe est définie seulement pour $t \in]e^{-x_0}, +\infty[$.

<u>2.2.4 Flot d'un champ de vecteurs</u>

<u>2.2.4.1. Def</u> Un flot sur M est une application différentiable $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ tq :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$
$$p \longrightarrow \varphi_t(p) = \varphi(t,p)$$

est un difféomorphisme.

(ii) $\varphi_0 = Id_M$

(iii) $\forall t,s \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

2.2.4.2 Def Le champ de vecteurs sur M qui engendre le flot φ_t est donné par

$$V(p) = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)\Big|_{t=0}$$

2.2.4.3. Proposition $\varphi_t(p)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = V(y)$ passant par p.

Preuve Posons $\xi(t) = \varphi_t(p)$

Alors $\xi(0) = p$ et

$$\xi'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\xi(t+\varepsilon) - \xi(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi_{t+\varepsilon}(p) - \varphi_t(p)}{\varepsilon}$$

$$= V(\xi(t)).$$

2.2.4.5. Exemple

Soient $A \in M(m, \mathbb{R})$ et V le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ défini par

$$V : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longrightarrow V(x) = Ax$$

Le flot engendré par V est donné par

$$\varphi_t(p) = e^{tA}\, p$$

Pour $m = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

9.3. Champs de vecteurs comme opérateurs différentiels

9.3.1. Def Soit V un champ de vecteurs sur M et $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. On définit l'application suivante

$$V: M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow Df(x)V(x)$$

Cette application est différentiable et elle est appelée la dérivée de Lie de f dans la direction du champ de vecteurs V. On la note L_V et donc $L_V f(x) = Df(x)V(x)$.

9.3.2 Représentation locale de $L_V f$

Supposons que $M = U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors

$$L_V f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) V_i(x).$$

pour $x \in U$.

9.3.3. Prop. Soit $c: J \longrightarrow M$ la courbe intégrale d'un champ de vecteurs V passant par p. Alors $f \circ c : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et $L_V f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0}$.

Preuve

$$\frac{d}{dt}(f\circ c)\Big|_{t=0} = D(f\circ c)(0)(1)$$
$$= Df(c(0))\, Dc(0)(1)$$
$$= Df(c(0))\, c'(0)$$
$$= Df(p)\, V(p)$$
$$= L_V f(p)$$

2.3.4. Propo: Soient $\varphi_t : M \longrightarrow M$ un flot sur M et V son générateur infinitésimal.

Alors
$$\frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t)(p) = L_V f(\varphi_t(p))$$

Preuve

Pour $p \in M$ fixé, posons $c(t) = \varphi_t(p)$.

Alors
$$\frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t)(p) = \frac{d}{dt}(f\circ c)(t)$$
$$= D(f\circ c)(t)(1)$$
$$= Df(c(t))\, Dc(t)(1)$$
$$= Df(c(t))\, c'(t)$$
$$= Df(c(t))\, V(c(t))$$
$$= L_V f(c(t))$$
$$= L_V f(\varphi_t(p)).$$

9.3.5. Prop Soient V un champ de vecteurs sur M, $f, g, h \in C^\infty(M) = \{ k : M \to \mathbb{R} \text{ tq } k \in C^\infty \}$

Alors :

(i) $L_V(fg) = (L_V f) g + f (L_V g)$

(ii) $L_V(f+g) = L_V f + L_V g$

(iii) $L_V(Cst) = 0$

(iv) $L_{hV} f = h L_V f$ où $hV(p) = h(p) V(p)$

Preuve : Exercice.

9.3.6 Def Une application $\theta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) dans la ~~définiti~~ proposition 9.3.5 est appelée une dérivation.

9.3.7. Théorème Soit $\theta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ une dérivation, alors il existe un champ de vecteurs sur M et un seul tq

$$\theta = L_V$$

9.3.8 Prop. et def. Soient V, W deux champs de vecteurs sur M.

Alors $L_V W \overset{\text{def}}{=} L_V \circ L_W - L_W \circ L_V$ est une dérivation dans $C^\infty(M)$. Elle est appelée la dérivée de Lie du champ de vecteurs W dans la direction de V.

Preuve Exercice

2.3.9 Déf Soient V et W deux champs de vecteurs sur M. Le crochet de Lie de V et W est le champ de vecteurs correspondant à la dérivation $L_V W$. Il est noté $[V, W]$.

2.3.10 Représentation locale du crochet de Lie

Soient V et W deux champs de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors

$$[V, W]_j = \sum_{i=1}^{n} \left(V_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - W_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

Preuve Exercice.

2.3.11. Exemple Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ et soit V le champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ défini comme suit

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$p \longrightarrow V(p) = Ap$$

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$L_V f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) V_i(p)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right)$$

2.3.12. Prop Le crochet de Lie a les propriétés suivantes:

(i) La $\mathbb{R}$-bilinéarité

(ii) $[V, W] = -[W, V]$

(iii) $[V, [W, Y]] + [W, [Y, V]] + [Y, [V, W]] = 0$ (Identité de Jacobi)

2.4. Champs de vecteurs et difféomorphismes

2.4.1. Def Soient N une variété différentiable de dimension m, V un champ de vecteurs sur M et $\varphi : N \longrightarrow M$ un difféomorphisme.
En termes de φ et W, on définit un champ de vecteurs sur N comme suit

$$\varphi^* W : N \longrightarrow TN$$
$$p \longrightarrow \varphi^* W(p)$$

où $\quad \varphi^* W(p) = D\varphi^{-1}(\varphi(p))\, W(\varphi(p))$

2.4.2 Exemple
Soient $\varphi : \mathbb{R}^* \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$

$$(\rho, \theta, z) \longrightarrow (x, y, z)$$

où $\quad x = \rho\cos\theta, \; y = \rho\sin\theta, \; z = z$

et le champ de vecteurs

$$W : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longrightarrow W(x, y, z) = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$$

Alors $\quad \varphi^* W(\rho, \theta, z) = (2\cos\theta - \sin\theta)\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2\sin\theta + \cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + 3\frac{\partial}{\partial z}$

2.4.3 Théorème Soient V et W deux champs de vecteurs sur M, et soit φ_t le flot engendré par V. Alors

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* W \Big|_{t=0} = [V, W]$$

Preuve Posons
$$Z = \frac{d}{dt} \varphi_t^* W \Big|_{t=0}$$
Soit $f \in C^\infty(M)$ et montrons
$$L_Z f = L_{[V,W]} f$$
Soit $p \in M$. Alors
$$L_Z f(p) = Df(p) Z(p)$$
$$= Df(p)\left(\frac{d}{dt} \varphi_t^* W(p) \Big|_{t=0} \right)$$
$$= \frac{d}{dt} \left(D(f \circ \varphi_{-t})(\varphi_t(p)) W(\varphi_t(p)) \right) \Big|_{t=0}$$
Maintenant, introduisons la fonction h définie par
$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,s,p) \longrightarrow h(t,s,p)$$
où
$$h(t,s,p) = D(f \circ \varphi_s)(\varphi_t(p)) W(\varphi_t(p)) = L_W(f \circ \varphi_s)(\varphi_t(p))$$
et remarquons que
$$\frac{d}{dt} h(t,-t,p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(D(f \circ \varphi_{-t})(\varphi_t(p)) W(\varphi_t(p)) \right) \Big|_{t=0}.$$
Posons $s(t) = -t$, et on a
$$\frac{d}{dt} h(t,s,p) \Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial h}{\partial s} \frac{ds}{dt} \right) \Big|_{t=0}$$
$$= \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{t=s=0}$$
Mais
$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{t=0} = L_V \left(L_W(f \circ \varphi_s)(\varphi_t(p)) \right) \Big|_{t=0} \quad \text{(Prop. 2.3.4)}$$
$$= L_V L_W f(p)$$

et

$$\left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{t=s=0} = L_W L_V f(p)$$

Donc le résultat désiré.

9.4.4. Corollaire V, W et φ_t comme ci-dessus. Alors

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* W = \varphi_t^*([V,W])$$

9.4.5. Théorème

Soient φ_t et ψ_s deux flots sur M engendrés respectivement par V et W.

Les propositions sont équivalentes :

(i) $[V,W]=0$

(ii) $\varphi_t^* W = W$

(iii) $\psi_s^* V = V$

(iv) $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$

Preuve (i) ⇒ (ii) ?

D'après (i), on a $\frac{d}{dt}\varphi_t^* W = \varphi_t^*([V,W]) = 0$

Donc $\varphi_t^* W = \text{Cst}$, et puisque $\varphi_0^* = \text{Id}$

alors $\varphi_t^* W = W$.

(ii) ⇒ (i) ?

De (ii) on a $\left.\frac{d}{dt}\varphi_t^* W\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} W\right|_{t=0} = 0$

Mais $[V,W] = \left.\frac{d}{dt}\varphi_t^* W\right|_{t=0}$

d'où le résultat.

On montre de la même façon que
(i) est équivalente à (iii) car $[W,V] = -[V,W]$.
Pour montrer que (ii) est équivalente à (iv) on a besoin du lemme suivant.

<u>2.4.6. Lemme</u> Soient V un champ de vecteurs sur M et φ un difféomorphisme de M.
Soit $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe intégrale de V passant par $\varphi(x_0)$. Alors $\varphi^{-1}\circ c$ est la courbe intégrale de ~~...~~ $\varphi^* V$ passant par x_0.

<u>Preuve du lemme</u> Posons $\gamma = \varphi^{-1}\circ c$

Donc
$$\frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\circ c)\Big|_{t=0}$$
$$= D(\varphi^{-1}\circ c)(t)(1)\Big|_{t=0}$$
$$= D\varphi^{-1}(c(t))\, Dc(t)(1)\Big|_{t=0}$$
$$= D\varphi^{-1}(c(0))\,\frac{dc}{dt}(0)$$
$$= D\varphi^{-1}(\varphi(x_0))\, V(\varphi(x_0)) = \varphi^* V(x_0).$$

Retour à la preuve de (ii) $\Leftrightarrow$ (iv)
Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iv).
Soit $p \in M$. La courbe intégrale de W passant par $\varphi_t(p)$ est $s \longmapsto \psi_s(\varphi_t(p))$
Donc la courbe intégrale de $\varphi_t^* W$ passant par p est $s \longmapsto \varphi_{-t}\,\psi_s\,\varphi_t(p)$

et puisque $\varphi_t^* W = W$, la courbe intégrale de $\varphi_t^* W$ passant par p est $s \longmapsto \psi_s(p)$

et de l'unicité des courbes intégrales, on déduit

que $$\psi_s(p) = \varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t(p)$$

donc $$\varphi_t \circ \psi_s(p) = \psi_s \circ \varphi_t(p)$$

d'où $$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

puisque p est qqe.

Pour (iv) $\Rightarrow$ (ii) Exercice.