Exercice No. 4 [Ex. 1.5.4 dans [GHL]].

Soit X un champ de vecteurs sur S^n. Prolongeons X à $\mathbb{R}^{n+1}$ par $\tilde{X}(x) = \|x\| \, X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

et soit Y un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Y(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Déterminer les champs de vecteurs $[\tilde{X}, Y]$ et $[V, Y]$ où $V(x) = \tilde{X}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

Solution

Déterminons $[\tilde{X}, Y]$.

On a $[\tilde{X}, Y]_i = \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \tilde{X}_j - \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial x_j} Y_j \right)$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3}$$

et donc

$$\sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \tilde{X}_j = \sum_j \left(\frac{1}{\|x\|} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} \right) \|x\| \, X_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$= X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x_i}{\|x\|} \sum_j \frac{x_j}{\|x\|} X_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$= X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{car} \quad \sum_j \frac{x_j}{\|x\|} X_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

Maintenant

$$\frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\|x\| \, X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)$$

$$= \frac{x_j}{\|x\|} X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|x\| \left(\frac{1}{\|x\|} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} - \frac{1}{\|x\|^3} \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial y_k} x_k x_j \right)$$

Donc

$$\sum_j \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial x_j} Y_j = \sum_j \frac{x_j^2}{\|x\|^2} X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \sum_j \frac{x_j}{\|x\|} \frac{\partial X_i}{\partial y_j}$$

$$- \sum_j \frac{x_j^2}{\|x\|^3} \sum_k x_k \frac{\partial X_i}{\partial y_k}$$

$$= X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \sum_j \frac{x_j}{\|x\|} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} - \sum_k \frac{x_k}{\|x\|} \frac{\partial X_i}{\partial y_k}$$

$$= X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

On a obtenu alors

$$[\tilde{X}, Y]_i = X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

Déterminons le champ de vecteurs $[V, Y]$.

On a $V(x) = X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

et $[V, Y]_i = \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} V_j - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} Y_j\right)$

$$\sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} V_j = \frac{1}{\|x\|} X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \sum_j \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} X_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|} X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x_i}{\|x\|^2} \sum_j \frac{x_j}{\|x\|} X_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|} X_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

et

$$\sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} Y_j = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial y_j} x_j - \sum_j \sum_k \frac{\partial V_i}{\partial y_k} \frac{x_k x_j}{\|x\|^3} \frac{x_j}{\|x\|}$$

$$= 0$$

Donc $[V, Y](x) = \frac{1}{\|x\|} V(x).$

Exercice No 5. (Ex. 1.62. dans [GHL])

Soient X, Y et Z des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ définis par : $X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$; $Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$, $Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

(i) Montrer qu'ils sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'ils engendrent. Montrer que E est stable par le crochet de Lie.

(ii) Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$$
$$(a,b,c) \longmapsto aX + bY + cZ$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

Soient $V, W \in E$. Montrer que

$$\varphi(\varphi^{-1}(V) \wedge \varphi^{-1}(W)) = [V, W].$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

(iii) Quel est le flot de $aX + bY + cZ$?

Solution

(i) Pour la stabilité de E par rapport au crochet de Lie, il suffit de montrer que

$[X,Y]$, $[X,Z]$, et $[Y,Z]$ $\in$ E.

On a $[X,Y] = Z$, $[X,Z] = -Y$ et $[Y,Z] = X$

(ii). $\ker\varphi = \{(0,0,0)\}$ donc φ est un isomorphisme

Pour $V = aX + bY + cZ$ et $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$

On a d'une part

$$\varphi^{-1}(V) \wedge \varphi^{-1}(W) = (b\gamma - c\beta,\ c\alpha - a\gamma,\ a\beta - b\alpha)$$

et d'autre part

$$[V,W] = (b\gamma - c\beta)X + (c\alpha - a\gamma)Y + (a\beta - b\alpha)Z.$$

(iii) Le flot de $aX+bY+cZ$ est donné par la solution du pb. de Cauchy

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x(0), y(0), z(0))^T = (x_0, y_0, z_0)^T$$

Donc $\varphi_t(x_0, y_0, z_0) = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

Ref [GHL]
S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer-Verlag, Heidelberg 1987.