Chapitre 3. Formes différentielles sur les variétés différentiables

3.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et soit $f : \underbrace{E \times \dots \times E}_{r\text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}$

3.1.1. Def On dit que f est une forme multilinéaire de degré r si l'application

$$x \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r)$$

est linéaire de E dans $\mathbb{R}$ quels que soient $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r \in E$.

3.1.2. Def On dit que l'application f est alternée si pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, \dots, x_r)$$

où $\operatorname{sgn} : \Sigma_r \longrightarrow \{+1, -1\}$

et Σ_r est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, r\}$.

3.1.3. Def On note par $\Lambda^r(E^*)$ l'ensemble des ~~applications~~ ~~multilinéaires~~ formes multilinéaires alternées de degré r.

3.1.4. Def Soient $f, g \in \Lambda^r(E^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

$$(f+g)(x_1, \dots, x_r) = f(x_1, \dots, x_r) + g(x_1, \dots, x_r)$$

et $(\lambda f)(x_1, \dots, x_r) = \lambda f(x_1, \dots, x_r)$

et $\Lambda^r(E^*)$ devient un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3.1.5. Déf : Produit extérieur

Soient $f \in \Lambda^r(E^*)$ et $g \in \Lambda^s(E^*)$. Le produit extérieur de f et g noté $f \wedge g$ est défini comme suit :

$$f \wedge g = \sum_{\sigma \in \Sigma_{r+s}} \operatorname{sgn}\sigma \, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})\, g(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})$$

3.1.6. Lemme

$$f \wedge g \in \Lambda^{r+s}(E^*)$$

Preuve : Exercice.

3.1.7. Exemples

Exemple 1 Soient $f, g \in \Lambda^1(E^*) = E^*$. Alors

$$f \wedge g(x_1, x_2) = f(x_1) g(x_2) - f(x_2) g(x_1)$$

Exemple 2 Soient $f \in \Lambda^1(E)$ et $g \in \Lambda^2(E)$. Alors

$$\begin{aligned} f \wedge g(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1) g(x_2, x_3) - f(x_2) g(x_1, x_3) \\ &+ f(x_3) g(x_1, x_2) - f(x_1) g(x_3, x_2) \\ &+ f(x_2) g(x_3, x_1) - f(x_3) g(x_2, x_1) \end{aligned}$$

3.1.8 Proposition

Soient $f \in \Lambda^r(E^*)$, $g \in \Lambda^s(E^*)$ et $h \in \Lambda^t(E^*)$.

Alors
(i) $f \wedge g = (-1)^r g \wedge f$
(ii) $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$

3.1.9. Proposition

Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E. Alors

(i) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une base de $\Lambda^1(E^*) = E^*$ où les φ_i sont tq $\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(ii) $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m\}$ est une base de $\Lambda^r(E^*)$, et par conséquent

$$\dim \Lambda^r(E^*) = \frac{m!}{(m-r)!\,r!}$$

Preuve : Exercice.

3.2. Formes différentielles

Soit M une variété différentiable de dimension m

Notons par $\Lambda^r((TM)^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r((T_pM)^*)$

la réunion disjointe des $\Lambda^r((T_pM)^*)$.

3.2.1. Proposition

$\Lambda^r((TM)^*)$ possède une structure de variété différentiable de dimension $m + \frac{m!}{(m-r)!\,r!} = n$

Idée de la démonstration

Soit (U_i, φ_i) une carte de M et soit

$$\Phi_i : \bigcup_{x \in U} \Lambda((T_pU_i)^*) \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque $\omega \in \Lambda^r((T_pM_i)^*)$,

$$\Phi(\omega) = \left(\varphi(p), (Dx_{i_1}(p), \dots, Dx_{i_r}(p))_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq r}\right)$$

Ces applications Φ_i sont utilisées pour définir une topologie et une structure sur $\Lambda^r((TM)^*)$.

3.2.2. Def

Une forme différentielle de degré r sur M est une application différentiable

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^r((TM)^*)$$

telle que $\omega(p) \in \Lambda^r((T_pM)^*)$.

3.2.3. Exemple

Soit $f \in C^\infty(M)$, alors $Df(x) : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire. Donc l'application

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow \Lambda((TM)^*) \\ x &\longrightarrow df(x) = Df(x) \end{aligned}$$

~~df~~ est ~~donc~~ une forme différentielle de degré 1 sur M.

3.2.4 Notation

L'ensemble des formes différentielles de degré r sur M est noté ~~par~~ $\Omega^r(M)$.

3.2.5. ~~Théorème~~ Def.

Soient $\omega \in \Omega^r(M)$, $\eta \in \Omega^s(M)$. Le produit extérieur de ω et η est défini comme suit :

Pour $p \in M$, $\omega \wedge \eta\,(p) \overset{\text{def}}{=} \omega(p) \wedge \eta(p)$.

3.2.6 Théorème

Soient $\omega \in \Omega^r(M)$, $\eta \in \Omega^s(M)$. Alors

i) $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$

ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^r \eta \wedge \omega$

Preuve Exercice.

3.2.7 Remarque

Les fonctions $f \in C^\infty(M)$ sont considérées comme des formes différentielles de degré 0.

Soit $\Omega \in \Omega^r(M)$, alors $f\omega(p) = f(p)\omega(p)$.

et $f \wedge \omega = f\omega$.

3.2.8 Exemple

~~Soit $f \in C^\infty(M)$~~ Soient $f_1, f_2, \dots, f_r \in C^\infty(M)$.

D'après l'exemple 3.2.3, $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r$ est une forme différentielle de degré r sur M.

3.2.9 Représentation locale d'une forme différentielle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit

$$x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p = (p_1, \dots, p_n) \longrightarrow x_i(p) = p_i$$

Alors l'application

$$Dx_i(p) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une application linéaire qu'on note par φ_i

et on a $\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\{e_1, \dots, e_m\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

D'après le paragraphe 3.1, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une base de $(\mathbb{R}^m)^*$, et $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r},\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m\}$ est une base de $\Lambda^r((\mathbb{R}^m)^*)$.

Soit $\omega \in \Omega^r(U)$, alors $\omega(p) \in \Lambda^r((T_pU)^*)$

donc
$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} f_{i_1 \dots i_r}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

On a le résultat suivant.

3.9.9.1. Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $\omega \in \Omega^r(U)$.
Alors ω s'écrit d'une façon unique comme suit

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le r} f_{i_1 \dots i_r}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

3.9.9.2. Lemme

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. Alors

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

<u>Preuve</u> D'après le théorème de ci-dessus

$$df = \sum_{i=1}^{m} f_i\, dx_i$$

et de l'exemple 3.9.3, on a

$$df(x)h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i(h)$$

d'où $df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$

et du théorème 3.9.9.1, on conclut que

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

3.2.10. Exemples

Exemple 1

~~Soit~~ Soient $V_1 = (0,1)$, $V_2 = (-1,-1)$ et $V_3 = (1,-1)$ et considérons les formes différentielles suivantes

$$\omega_1 = dx_1 \quad , \quad \omega_2 = x_1\, dx_2, \quad \omega_3 = 2x_1\, dx_1 + 2x_2\, dx_2$$

$\omega_1(0,0)V_1 = dx_1(0,0)V_1 = 0$;

$\omega_1(2,2)V_2 = dx_1(2,2)V_2 = -1$;

$\omega_1(2,2)V_3 = dx_1(2,2)V_3 = 1$;

Effectuer les mêmes calculs pour ω_2 et ω_3.

Exemple 2

Soient $V_1 = (1,0)$, $V_2 = (1,1)$ et $\omega = dx_1 \wedge dx_2$

$\cancel{\omega(V_1,V_2) = dx_1(1,1)\wedge}$

$$\omega(1,1)(V_1,V_2) = [dx_1(1,1) \wedge dx_2(1,1)](V_1,V_2)$$

$$= dx_1(1,1)(V_1)\, dx_2(1,1)(V_2) - dx_1(1,1)(V_2)\, dx_2(1,1)(V_1)$$

$$= 1 - 0 = 1.$$

Question Soit $\omega_2 = x_1\, dx_1 \wedge dx_2 - x_2\, dx_2 \wedge dx_1$

Trouver $\omega_2(1,1)(V_1,V_2)$.

3.3. Image réciproque d'une forme différentielle par une application

3.3.1. Def Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Soient $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable et ~~Ω~~ une forme différentielle de degré r sur N.

On définit l'application ~~[illegible]~~

$$f^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$