par $f^*\omega(p)(V_1,\dots,V_r) = \omega(f(p))(Df(p)V_1,\dots,Df(p)V_r)$

3.3.2. Proposition

Soient $\omega \in \Omega^r(N)$ et $\eta \in \Omega^s(N)$. Alors

$$f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

Preuve: Exercice

3.3.3. Représentation locale de $f^*\omega$

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement

$f: U \longrightarrow V$ une application différentiable,

Soient $(x_1,\dots,x_n)$ le système ~~locales~~ dans U, et $(y_1,\dots,y_m)$ le système de coordonnées ~~locales~~ dans V.

Alors $f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$

où $f_i = y_i\circ f$

Déterminons df_i.

$$Df_i(p): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Df_i(p) = D(y_i\circ f)(p)$$

D'où

$$dy_i(p)(V) = Df_i(p)(V) = D(y_i\circ f)(p)(V)$$

$$= Dy_i(f(p))\circ Df(p)(V)$$

$$= dy_i(f(p))\circ Df(p)(V)$$

$$= f^* dy_i(p)(V)$$

donc $df_i = f^*(dy_i)$

De l'expression de df_-, on déduit

(i) $f^*(dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_r}) = (f^*dy_{i_1})\wedge\dots\wedge(f^*dy_{i_r})$

$$= df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_r}$$

(ii) $f^*(a\, dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_r}) = (a\circ f)\, df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_r}$

où $a : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable.

__3.3.3.1. Théorème__ Pour le cas $m=n$, on a

$$f^*(dy_1\wedge\dots\wedge dy_n) = J(f)\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$$

où $J(f)$ est le déterminant de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

__Preuve__

On a $f^*(dy_1\wedge\dots\wedge dy_n) = (f^*dy_1)\wedge\dots\wedge(f^*dy_n)$

$$= df_1\wedge\dots\wedge df_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} dx_i\right)$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\\ i_r\ne i_s\\ r\ne s}} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_n}$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}}\, dx_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge dx_{\sigma(n)}$$

$$= J(f)\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$$

Ici σ est une permutation de $\{1,\dots,n\}$ et Σ_n est l'ensemble de ces permutations.

3.3.3.2 Exemples

Exemple 1

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$

$t \longrightarrow e^t$

$$f^*\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = f^*(a(x)\,dx) \quad \text{où} \quad a(x) = \frac{1}{x}$$

$$= a \circ f \; f^* dx$$

$$= e^{-t} e^t \, dt = dt$$

Exemple 2

$U = V = \mathbb{R}^2$

$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$f^*(dx \wedge dy) = J(f)\, dr \wedge d\theta$$

$$= r\, dr \wedge d\theta$$

3.3.3.3. Proposition

Soient M, N et W des variétés différentiables, et $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow W$ deux applications différentiables ; alors

$$(g \circ f)^* \omega = (f^* \circ g^*)\, \omega$$

où $\omega \in \Omega^r(W)$.

Preuve : Exercice.

3.4. Formes différentielles en tant que opérateurs sur les champs de vecteurs

Soient $V_1, \dots, V_r$ des champs de vecteurs sur M

et $\omega \in \Omega^r(M)$.

On définit l'application suivante :

$$\omega(V_1,\dots,V_r) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longrightarrow \omega(p)(V_1(p),\dots,V_r(p))$$

C'est une application de classe C^∞, et vérifie

i) $\omega(V_1,\dots,V_r) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\omega(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(r)})$

ii) $\omega(V_1,\dots,V_{i-1}, fV+gW, V_{i+1},\dots,V_r) =$

$= f\omega(V_1,\dots,V_{i-1},V,V_{i+1},\dots,V_r) + g\omega(V_1,\dots,V_{i-1},W,V_{i+1},\dots,V_r)$

où $f,g \in C^\infty(M)$.

Alors ω on peut considérer ω comme une forme alternée, multilinéaire d'ordre r sur $C^\infty(M)$, de $\Gamma(M)$ vers $C^\infty(M)$, où $\Gamma(M)$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

3.5. Différentiation extérieure d'une forme différentielle

3.5.1. Lemme

Soit ω une forme différentielle de degré $1 \le r \le m$ sur une variété différentiable M de dimension m.

On définit l'application

$$d\omega : \Gamma(M)\times\dots\times\Gamma(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

par

$$d\omega(V_1,\dots,V_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1} L_{V_i}\,\omega(V_1,\dots,V_{i-1},V_{i+1},\dots,V_{r+1})$$
$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_{r+1})$$

Alors $d\omega$ est une forme différentielle de degré $r+1$ sur M.

Preuve : Exercice

3.5.1 Définition

$d\omega$ est appelée la dérivée extérieure de ω.

3.5.2. Représentation locale de $d\omega$

3.5.2.1. Théorème Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\omega \in \Omega^r(U)$ défini par

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n} f_{i_1\dots i_r}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}$$

Alors
$$d\omega = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n} df_{i_1\dots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}$$

3.5.2.2. Exemples U ouvert de $\mathbb{R}^n$

Exemple 1 $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$

La dérivée extérieure de f n'est autre que la différentielle de f.

Exemple 2 $\omega \in \Omega^1(U)$:

$$\omega = f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n$$

$$d\omega = df_1\wedge dx_1 + \dots + df_n\wedge dx_n$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i\wedge dx_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} dx_{n-1}\wedge dx_n$$

Exemple 3 $\Omega \in \Omega^2(U)$

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} f_{i_1 i_2}\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}$$

$$d\omega = \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} df_{i_1 i_2}\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}$$

3.5.3. Proposition

Soit $f : M \to N$ une application différentiable et supposons que $\omega \in \Omega^r(N)$. Alors
$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Preuve

Soit $p \in M$ et montrons que $d(f^*\omega)(p) = (f^*d\omega)(p)$

On utilise la représentation locale de ω et $d\omega$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_m)$ le système de coordonnées dans U, et $(y_1, \dots, y_n)$ le système de coordonnées dans V,

Alors $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$

Posons $\omega = a\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}$

où $a \in C^\infty(V)$.

Donc
$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}$$

et par conséquent
$$f^*(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \circ f\right) df_i \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$

et d'autre part on a
$$f^*\omega = a \circ f\, df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$
$$d(f^*\omega) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(a \circ f)\, dx_j \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a \circ f) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}(a\circ f)\, df_i \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$

D'où $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$

3.5.4. Proposition

Soient $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\alpha \in \Omega^s(M)$.

Alors

i) $d(d\omega) = 0$

ii) $d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^r \omega \wedge d\alpha$

Preuve

Il suffit de montrer les résultats localement.

Posons $\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, $\alpha = g\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$

i) $d\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$

et $d(d\omega) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

alors $d(d\omega) = 0$.

ii) $\omega \wedge \alpha \in \Omega^{r+s}(M)$

$\omega \wedge \alpha = fg\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+s}}$

$d(\omega \wedge \alpha) = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+s}}$

$$d(\omega \wedge \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+s}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+s}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+s}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}\right) \wedge \left(g\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}\right)$$

$$+ \left(f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}\right) \wedge \left((-1)^r \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}\right) =$$

$$= d\omega \wedge \alpha + (-1)^r \omega \wedge d\alpha$$