## Exercice No 6 ([JD] Ex 4, p. 400)

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$

une forme différentielle de degré $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$. Calculer $d\omega$.

**Solution**

$$d\omega = d\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, d\left(x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} dx_k\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= -n \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$



## Exercice No. 7. ([JD] Ex 6, p. 400)

Soient $\varphi$ l'application de $U = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$

dans $V = \complement A$ où $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, \; y \leq 0 \right\}$

par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

et $\omega = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$

Calculer $\varphi^* \omega$

**Solution** Posons $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

où $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\varphi^*\omega(r,\theta) = \varphi^*(f\,dx + g\,dy)$$
$$= (f\circ\varphi)\,\varphi^*(dx) + (g\circ\varphi)\,\varphi^*(dy)$$
$$= (f\circ\varphi)\,d(x\circ\varphi) + (g\circ\varphi)\,d(y\circ\varphi)$$

On a $f\circ\varphi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$$= \frac{\cos\theta}{r}$$
$$g\circ\varphi(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$= \frac{\sin\theta}{r}$$
$$d(x\circ\varphi) = d(r\cos\theta) = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta$$
$$d(y\circ\varphi) = d(r\sin\theta) = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$$

Alors $\varphi^*\omega(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r}(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) +$
$$\frac{\sin\theta}{r}(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = \frac{dr}{r}$$



Exercice No. 8 ([J D] Ex. 2, p. 400)

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs
$$X = f_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + g_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + h_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Y = f_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + g_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + h_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

Les formes différentielles associées à $X$ et $Y$ sont données respectivement par
$$\alpha = f_1\,dx + g_1\,dy + h_1\,dz$$
$$\beta = f_2\,dx + g_2\,dy + h_2\,dz$$

a) Montrer que le champ de vecteurs associés à $\alpha \wedge \beta$ est $X \wedge Y$.

b) Montrer que
$$\mathrm{rot}(fX) = f(\mathrm{rot}\, X) + (\mathrm{grad}\, f) \wedge X$$
si $f$ est une fonction réelle continûment dérivable dans $\mathbb{R}^3$.

<u>Solution</u>

a) $\alpha \wedge \beta = (f_1 dx + g_1 dy + h_1 dz) \wedge (f_2 dx + g_2 dy + h_2 dz)$

$= f_1 g_2 \, dx \wedge dy + f_1 h_2 \, dx \wedge dz + g_2 f_2 \, dy \wedge dx +$
$g_1 h_2 \, dy \wedge dz + h_1 f_2 \, dz \wedge dx + h_1 g_2 \, dz \wedge dy$

$= (f_1 g_2 - g_1 f_2) \, dx \wedge dy + (f_1 h_2 - h_1 f_2) \, dx \wedge dz +$
$(g_1 h_2 - h_1 g_2) \, dy \wedge dz$

et d'autre part

$$X \wedge Y = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{pmatrix}$$

$= \cancel{\det} \, (g_1 h_2 - h_1 g_2) \vec{i} - (f_1 h_2 - h_1 f_2) \vec{j} +$
$(f_1 g_2 - g_1 f_2) \vec{k}$

et puisque $\alpha \wedge \beta$ peut s'écrire aussi comme

$\alpha \wedge \beta = (g_1 h_2 - h_1 g_2) \, dy \wedge dz - (f_1 h_2 - h_1 f_2) \, dz \wedge dx +$
$(f_1 g_2 - g_1 f_2) \, dx \wedge dy$

et donc $X \wedge Y$ est le champ de vecteurs associé à $\alpha \wedge \beta$.

b) On a $\mathrm{Rot}(fX) = D \wedge (fX)$ (produit vectoriel)

où $D = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x}, \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \frac{\partial \cdot}{\partial z}\right)$

La forme différentielle associée à $fX$ est

$f\alpha = f f_1\, dx + f g_1\, dy + f h_1\, dz$

et la forme différentielle associée à $D$ est

$$\omega = \frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy + \frac{\partial \cdot}{\partial z} dz$$

D'après (a), la forme différentielle à $D \wedge (fX)$ est $\omega \wedge (f\alpha)$ (produit extérieur).

$$\omega \wedge (f\alpha) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy + \frac{\partial \cdot}{\partial z} dz\right) \wedge \left(f f_1\, dx + f g_1\, dy + f h_1\, dz\right)$$

$$= f(\omega \wedge \alpha) + (d f) \wedge \alpha$$

le champ de vecteurs associé à $\omega \wedge \alpha$ est $D \wedge X = \mathrm{Rot}\, X$

et le champ de vecteurs associé à $df \wedge \alpha$ est $\mathrm{grad} f \wedge X$.

D'où $\mathrm{Rot}(fX) = f\, \mathrm{Rot}\, X + (\mathrm{grad} f) \wedge X$.

---

Exercice 9

Montrer que la restriction de la forme différentielle

$\omega = x\,dy - y\,dx + z\,dt - t\,dz$

sur la sphère $S^3$ ne s'annule pas.

Solution.

Pour $p \in S^3$, $\alpha(p) = 0$ ssi $\alpha(p)X = 0$ pour tout $X \in T_pS^3$.

Mais $X \in T_pS^3$ ssi $Df(p)X = 0$

où $f(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2$

d'où $X \in T_pS^3$ ssi $x_1X_1+y_1X_2+z_1X_3+t_1X_4 = 0$

ssi $x_1dx(X)+y_1dy(X)+z_1dz(X)+t_1dt(X)=0$

ssi $\beta(p)(X) = 0$.

Ici $x_1,y_1,z_1,t_1$ sont les coordonnées de $p \in S^3$,

et $\beta = x\,dx+y\,dy+z\,dz+t\,dt$

Alors si pour $p \in S^3$, $\alpha(p) = 0$, $\alpha(p)$ et $\beta(p)$

s'annule sur $T_pS^3$; c'est à dire

$$\alpha(p)X = \beta(p)X = 0$$

pour tout $X \in T_pS^3$.

Donc $\left\{\begin{array}{l} x_1X_1+y_1X_2+z_1X_3+t_1X_4 = 0 \\ x_1X_2-y_1X_1+z_1X_4-t_1X_3 = 0 \end{array}\right.$

pour tout $X \in T_pS^3$,

où $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ -y_1 & x_1 & -t_1 & z_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = 0$

pour tout $X \in T_pS^3$.

Les lignes de la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ -y_1 & x_1 & -t_1 & z_1 \end{pmatrix}$

sont linéairement dépendants.

D'où $\dfrac{-y_1}{x_1} = \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{-t_1}{z_1} = \dfrac{t_1}{z_1} = \gamma$

et par conséquent $x_1^2+y_1^2 = 0$ et $z_1^2+t_1^2 = 0$

et ceci est impossible car $p \in S^3$.

## Bibliographie

- Jacques Dixmier; Cours de Mathématiques du premier cycle, Gauthier-Villars, Paris, 1977.