Chapitre 4. Intégration des formes différentielles

4.1. Introduction

Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, on a pour $a<b$

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \quad (TF).$$

Remarquons tout d'abord qu'on a utilisé l'orientation naturelle de $\mathbb{R}$ donnée par l'ordre.
Remarquons aussi qu'on peut réécrire l'égalité de ci-dessus comme suit

$$\int_a^b df(t) = f(b) - f(a)$$

ou

$$\int_{]a,b[} df(t) = f\Big|_a^b$$

$df()$ est une forme différentielle de degré 1, et $]a,b[$ est une variété différentiable de dimension 1. Les points a et b représentent la frontière de l'intervalle $]a,b[$.
La forme df est aussi la dérivée extérieure de la forme différentielle de degré 0, f.
Le but de chapitre est de généraliser la formule (TF) aux dimensions supérieures, c'est à dire établir la relation suivante connue sous le nom formule de Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

où M est une variété différentiable de dimension m
ω une forme différentielle de degré $m-1$,
∂M est la frontière de M, et $d\omega$ est
la dérivée extérieure de ω.
Pour ce faire, on doit définir les concepts
suivants :

- Frontière d'une variété différentiable.
- Orientation d'une variété différentiable.
- Intégration des formes différentielles

4.2. Variétés à bord

4.2.1. Def Une variété différentiable de dimension m avec bord se définit comme une variété différentiable de dimension m, sauf que les cartes sont des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m_+$, est les applications de changement de coordonnées de $\mathbb{R}^m_+$ dans $\mathbb{R}^m_+$.

Ici $\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$.

4.2.2. Def Un point $p \in M$, s'appelle point de bord s'il existe une carte (U, φ) telle que $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$

4.2.3. Lemme La définition 4.2.2., de ci-dessus est indépendante du choix des cartes.

Preuve Exercice.

On note ∂M l'ensemble des points de bord de M.

4.2.4. Proposition Si M est une variété différentiable de dimension m, sa frontière ∂M est une variété différentiable de dimension $m-1$.

Preuve Exercice

4.3. Variétés orientables

4.3.1. Orientation d'un espace vectoriel

4.3.1.1. Def Soit E un e.v. de dimension m sur $\mathbb{R}$. On dit que deux bases de E définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage est positif.

4.3.1.2. Def On définit ~~une~~ relation $\sim_b$ sur l'ensemble des bases de E comme suit :

$$B_E \sim_b B'_E \iff B_E \text{ et } B'_E \text{ définissent la même orientation.}$$

4.3.1.3 Lemme La relation $\sim_b$ est une relation d'equivalence

4.3.1.4. Def Une orientation de E est une classe d'equivalence de la relation $\sim_b$.

4.3.2 Orientation d'une variété différentiable

4.3.2.1 Def Soit M une variété différentiable de dimension m et soit $A = \{(U_i, \varphi_i) ; i \in I\}$ un atlas pour M.

On dit que A est un atlas d'orientation si toutes les applications de changement de coordonnées φ_{ij} ont un jacobien positif.

Une variété orientable est une variété pour laquelle il existe des atlas d'orientation.

4.3.2.2 Def On définit la relation $\sim_0$ sur l'ensemble des atlas de M

$$A \sim_0 A' \iff A \cup A' \text{ est un atlas d'orientation pour } M.$$

$\sim_0$ est une relation d'équivalence (Exercice).

4.3.2.3 Def On dit qu'une carte (V, φ) est compatible avec l'orientation de l'atlas A si les applications $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi_i$ ont un jacobien positif.

4.3.2.4 Def

- Une orientation d'une variété orientable est une classe d'équivalence de la relation $\sim_0$
- Une variété orientée est une variété muni d'une orientation.
- Soient M et N deux variétés orientées respectivement par les atlas d'orientation (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j). Un difféomorphisme conserve (resp. renverse) l'orientation si le jacobien de $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est positif (resp. négatif).

4.3.2.5. Proposition

Si $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ est un atlas d'orientation pour M, alors $\{(U_i \cap \partial M, \varphi_i|_{U_i \cap \partial M}), i \in I\}$ est un atlas d'orientation pour ∂M.

Preuve : Exercice.

4.4. Forme volume

4.4.1. Def Une forme volume sur une variété différentiable M de dimension m est une forme différentielle de degré m partout non nulle. C'est à dire que $\omega(p)(V_1, \dots, V_m) \neq 0$ pour tout $p \in M$ et $V_1, \dots, V_m \in T_pM$.

4.4.2. Exercices

a) Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme et si $\omega \in \Omega^n(N)$ est une forme volume sur N, alors $\varphi^*\omega$ est une forme volume sur M.

b) Si $\omega \in \Omega^m(M)$ est une forme volume, alors toute forme α de degré m peut s'écrire d'une façon unique sous la forme $f\omega$ où $f \in C^\infty(M)$.

4.4.3. Proposition

Toute forme volume sur M définit une orientation sur M.

Preuve

Soit ω une forme volume et soit $\{(U_i,\varphi_i), i\in I\}$ un atlas de M.

Alors $\varphi_i^{-1*}\omega = f_i\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ est partout non nulle

où $f_i \in C^\infty(U_i)$ et on suppose que $f_i > 0$.

On a d'une part

$$(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})^*(f_j\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_n) = f_i\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$$

et d'autre part

$$(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})^*(f_j\, dy_1\wedge\dots\wedge dy_n) = \mathrm{Jacob}(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\, f_j(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$$

Donc

$$\mathrm{Jacob}(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}) = \frac{f_i}{f_j(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})} > 0$$

Alors $\{(U_i,\varphi_i), i\in I\}$ est un atlas d'orientation.

4.5. Intégration des formes différentielles

4.5.1. Def Le support d'une forme différentielle de degré m sur M est l'ensemble

$$\mathrm{supp}\,\omega = \overline{\{x\in M : \omega(x)\neq 0\}}$$

On notera $\Omega_0(M)$ l'ensemble des formes différentielles à support compact.

4.5.2. Intégration des formes différentielles sur des ouverts de $\mathbb{R}^m$

On suppose que les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont orientés par la forme volume $dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$

4.5.2.1. Def Soit $\omega \in \Omega_0^m(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On appelle intégrale de ω et on la note par $\int_U \omega$, l'expression

$$\int_U f\, dx_1 \ldots dx_m$$

si $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$

4.5.2.2. Proposition Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme et soit $\alpha \in \Omega_0^m(V)$.

Alors
$$\int_U \varphi^* \omega = \pm \int_V \omega$$

suivant que φ conserve ou renverse l'orientation

Preuve On a $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$

et $\varphi^* \omega = f \circ \varphi\ \varphi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m)$

$= f \circ \varphi\ (\mathrm{Jac}\, \varphi)\ dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m$

Mais d'après la formule du changement des variables dans les intégrales multiples

$$\int_V f\, dx_1 \ldots dx_m = \int_U (f \circ \varphi)\, |\mathrm{Jac}\, \varphi|\, dy_1 \ldots dy_m$$

4.5.3. Intégration des formes différentielles sur des variétés différentiables

Soient M une variété différentiable de dimension m et $\omega \in \Omega_0^m(M)$.

Notre objectif est de définir $\int_M \omega$.

On distingue les cas suivants

1er Cas $\operatorname{supp}\omega \subset U$ où (U,φ) est une carte de M

$h = \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$

$h^*\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

Alors

$$\int_M \omega = \int_U \omega \overset{\text{déf}}{=} \int_{\varphi(U)} h^*\omega = \int_{\varphi(U)} f\, dx_1 \dots dx_m$$

Cette définition est indépdt du choix des cartes.

En effet soit (V, ψ) une carte de M compatible avec (U,φ) et supposons $U = V$

Soit $k = \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow U$

$k^*\omega = g\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$

Soit $\theta = h^{-1}k : \psi(V) \longrightarrow \varphi(U)$

On a $\theta^*(h^*\omega) = (h\circ\theta)^*\omega = k^*\omega$

$$k^*\omega = g\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \theta^*(f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) = \operatorname{Jacob}\theta\ (f\circ\theta)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

Alors

$$\int_{\varphi(U)} h^* \omega = \int_{\varphi(U)} f \, dx_1 \dots dx_m$$

$$= \int_{\psi(U)} (f \circ \theta) \, |\mathrm{Jacob}\, \theta| \, dy_1 \dots dy_m$$

$$= \int_{\psi(U)} (f \circ \theta) \, (\mathrm{Jacob}\, \theta) \, dy_1 \dots dy_m$$

$$= \int_{\psi(U)} g \, dy_1 \dots dy_m = \int_{\psi(U)} k^* \omega$$

<u>2ème Cas : ω est qqc</u>

<u>4.5.3.1. Def</u> Soient $\theta_k : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in K)$ des fonctions différentiables sur M.

On dit que l'ensemble $(\theta_k)_{k \in K}$ est localement fini si tout point $p \in M$, admet un voisinage ouvert V_p tq toutes les restrictions $\theta_k|_{V_p}$ soient nulles sauf un nombre fini d'entre elles.

<u>4.5.3.2. Proposition</u> Soit $U = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentiable M.

Il existe un recouvrement ouvert $V = (V_k)_{k \in K}$ de M localement fini et plus fin que U et une partition de l'unité θ_k subordonnée au recouvrement au recouvrement V tq chaque fonction θ_k soit différentiable sur M.

Ceci veut dire que V est un recouvrement d'ouvert de M et $(\theta_k)_{k\in K}$ est un ensemble localement fini d'applications différentiables sur M ayant les propriétés suivantes:

- Chaque point de M possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'ouverts de V.
- Tout ouvert de V est contenu dans un ouvert de U.
- Le support de θ_k est contenu dans V_k.

On choisit une partition localement fini de M composée de cartes (U_i, φ_i).

Soient $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ des fcts de classe C^∞.

tq:

i/ $f_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in M$

ii/ $\text{supp}(f_i) \subset U_i$

iii/ $\sum_i f_i(x) = 1$ pour tout $x \in M$.

On définit
$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega.$$

Cette somme finie parceque $\text{supp}(\omega)$ est compacte

On vérifie maintenant que cette définition est indpdt du choix des cartes (U_i, φ_i) et des fcts f_i.

Soient V_j, ψ_j, σ_j tq:

i) $(V_j)_{j\in J}$ est un recouvrement localement fini de M.

ii) (V_j, ψ_j) est une carte de M.

iii/ $\sigma_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\sigma_j(x) \geq 0$ pour tout $x \in M$, $\sigma_j \in C^\infty$

iv/ $\operatorname{supp}(\sigma_j) \subset V_j$

v/ $\sum_j \sigma_j(x) = 1$ pour tout $x \in M$.

Alors

$$\sum_j \int_{V_j} \sigma_j \omega = \sum_j \int_{V_j} \sigma_j \left(\sum_i \rho_i\right) \omega$$

$$= \sum_j \int_{V_j} \sum_i \sigma_j \rho_i \omega = \sum_i \int_{U_i} \left(\sum_j \sigma_j\right) \rho_i \omega$$

$$= \sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega .$$

4.6. Orientation de la frontière d'une variété différentiable

4.6.1. Def Soit $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$

On dit qu'un vecteur $V = (V_1, \dots, V_n) \in \mathbb{R}^n$ est intérieur pour $\mathbb{R}^n_+$ si $V_n > 0$.

On dit que V est extérieur pour $\mathbb{R}^n_+$ si $V_n < 0$.

4.6.2. Def Soit M une variété différentiable de dimension n de frontière ∂M. Soit $p \in M$.

On dit qu'un vecteur $V \in T_pM$ est orienté extérieurement s'il existe une carte (U, φ) de M tq $\theta_\varphi(V)$ est un vecteur extérieur

où $\theta_\varphi : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ défini ds le premier chapitre

4.6.3. Def Soit E un e.v. orienté de dimension m, et soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E.

On définit $\operatorname{sign}\{e_1, \dots, e_m\}$ comme suit

$$\operatorname{sign}\{e_1, \dots, e_m\} = \begin{cases} +1 & \text{si } \{e_1, \dots, e_m\} \text{ définit la même orientation} \\ -1 & \text{si } \{e_1, \dots, e_m\} \text{ définit l'orientation inverse.} \end{cases}$$

4.6.4. Def Soit $w \in T_pM$ un vecteur orienté extérieurement, et soit $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ une base de $T_p(\partial M)$.

On définit

$$\operatorname{sign}\{e_1, \dots, e_{m-1}\} = \operatorname{sign}\{w, e_1, \dots, e_{m-1}\}$$

$\{w, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ est une base orientée de T_pM.

Une orientation de ∂M est l'orientation définie par un vecteur extérieur.

4.7. Théorème de Stokes

4.7.1 Théorème Soit M une variété différentiable de dimension m, et de frontière ∂M.

Soit $\omega \in \Omega_0^{m-1}(M)$. Alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Preuve De la définition de l'intégrale $\int_M \omega$, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $supp(\omega) \subset U$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Posons $$\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m$$

donc
$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

On distingue deux cas.

1er Cas $\partial U = \emptyset$ On montre $\int_U d\omega = 0$.

$$\int_U d\omega = \sum_{i=1}^{m} \int_U \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_m$$

D'après le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m$$

On pose $g(t) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) dt$$

Puisque f s'annule en dehors d'un compact alors il existe $a > 0$ tq $g(t) = 0$ pour $|t| \geq a$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\,dt = \int_{-a}^{a} g'(t)\,dt = g(a) - g(-a) = 0.$$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx_i = 0$ et donc $\displaystyle\int_U d\omega = 0.$

<u>2ème Cas $\partial U \neq \emptyset$</u>

On déduit de ce qui précède que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx_1 \dots dx_m = 0$$

qd $i \neq m$.

Pour $i = m$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\,dx_m \right) dx_1 \dots dx_{m-1}$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel, on a

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\,dx_m \right) dx_1 \dots dx_{m-1}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\,dx_1 \dots dx_{m-1}$$

donc

$$\int_U d\omega = -\int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\,dx_1 \dots dx_{m-1}$$

Soit $j : \partial U \longrightarrow U$ l'injection canonique

Alors $j^*\omega \in \Omega^{m-1}_c(\partial U)$ et

$$j^*\omega = (-1)^{m-1} f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$$

parceque $j^*(dx_m) = 0$ et $j^*(dx_i) = dx_i$

pour $i = 1, \dots, m-1$.

D'ou
$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\partial U} j^*\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^m_+} j^*\omega$$

On désigne une orientation de ∂U comme suit.

Le vecteur exterieur est $-e_m = (0, \dots, 0, -1)$

et l'orientation de ∂M a le signe de la base

$\{-e_m, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ qui est $(-1)^m$

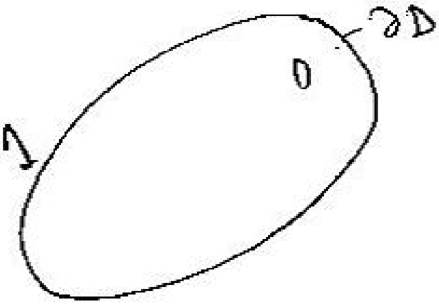
Alors
$$\int_{\partial U} \omega = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (-1)^{m-1} f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{m-1}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{m-1}$$

$$= \int_U d\omega.$$

4.7.2. Théorème de Green

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière ∂D



Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
une forme différentielle de degré 1
$P, Q \in C^1(D)$.

Alors
$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

<u>Preuve</u> On a $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$

et d'après Stokes
$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

■

4.7.3. Formule d'Ostrogradski

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ de frontière régulière ∂D
et soit $\omega = P(x,y,z)\, dy \wedge dz + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dx \wedge dy$
une forme différentielle de degré 2,
où $P, Q, R \in C^2(D)$.

Alors
$$\int_{\partial D} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Bibliographie

1- Claude Godbillon, Géométrie différentielle et mecanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

2- Jacques Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

3- Serge Lang, Differential and Riemannian manifolds, Springer-Verlag, 1996.