Exercice No. 10

Soient $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6-(x^2+y^2)\}$

$D = \{(x,y,z) \in M : z > 2\}$

et $\omega = yz^2 dx + xz\, dy + x^2y^2 dz$

Orienter M et calculer

$$\iint_D \{z\, dx \wedge dy + d\omega\}$$

Solution

Soit $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ et } z = 2\}$

On oriente par le vecteur normal exterieur $\vec{N} = (u, v, -1)$.

D'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{D \cup P} d\omega = 0$$

d'où $\int_D d\omega = -\int_P d\omega$

et donc

$$\iint_D \{z\, dx \wedge dy + d\omega\} = \int_D (6-(x^2+y^2))\, dx \wedge dy - \int_P d\omega$$

On a

$$\int_D (6-(x^2+y^2))\, dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6-r^2) r\, dr\, d\theta = 16\pi$$

et $\int_P d\omega = \int_P d(4y\, dx + 2x\, dy) = \int_P (4\, dy \wedge dx + 2\, dx \wedge dy)$

$= -2\int_P dx \wedge dy = -8\pi$

Donc $\displaystyle\int_D z\, dx\wedge dy + d\omega = 24\pi$

Exercice No. 11

Supposons que S^2 est orienté par le champ de vecteurs extérieurs

$$N = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

Calculer $\displaystyle\int_{S^2}\omega$

où $\omega = x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy$

Solution

Soit $F : [0,\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow S^2$

$$F(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

On a

$$F^* dx = \cos\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta$$

$$F^* dy = \cos\varphi\sin\theta\, d\varphi + \sin\varphi\cos\theta\, d\theta$$

$$F^* dz = -\sin\varphi\, d\varphi$$

Alors $\displaystyle\int_{S^2}\omega = \pm\int_D F^*\omega$

+ si F conserve l'orientation

− si F renverse l'orientation

et $\displaystyle\int_D F^*\omega = \int_D \sin\varphi\, d\varphi\wedge d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4\pi$

On détermine l'orientation de S^2 définie par F

On a $\left\{ DF(\varphi,\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, DF(\varphi,\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

est une base de $T_\xi S^2$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

est une base de $T_\xi S^2$.

D'autre part le vecteur $\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

est orthogonal à $T_\xi S^2$ et dirigé vers l'extérieur de S^2.

Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

est égale à $\sin\varphi > 0$.

Donc F conserve l'orientation et $\int_{S^2} \omega = 4\pi$.

Exercice N°12

Une courbe fermée sur une variété différentiable M est une courbe fermée $\gamma : S^1 \longrightarrow M$.

Si $\omega \in \Omega^1(M)$, on définit l'intégrale curviligne de ω sur M comme suit

$$\oint_\gamma \omega = \int_{S^1} \gamma^*(\omega)$$

i. Si $M = \mathbb{R}^n$, écrire $\int_\gamma \omega$ en termes des coordonnées de ω et γ.

ii. Soit $h: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
$t \longrightarrow (\cos t, \sin t)$

Montrer que si $\omega \in \Omega^1(S^1)$, on a
$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} h^*\omega$$

iii. Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ définie par
$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
Calculer $\int_{S^1} \omega$.

Solution

i. $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\omega = f_1(x_1,\dots,x_n)dx_1 + \dots + f_n(x_1,\dots,x_n)dx_n$
où $f_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fcts différentiables.
$\gamma: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable

Alors
$$\gamma: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\theta \longrightarrow \gamma(\theta) = (\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_n(\theta))$$

où $\gamma_i: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable.

Par définition $\gamma^*\omega$ est une forme différentielle de degré 1 sur S^1, c.à.d. $\gamma^*\omega \in \Lambda^1(T^*_\theta S^1)$

Des expressions de γ et ω, on déduit que
$$\gamma^*\omega = f_1\circ\gamma\, d\gamma_1 + \dots + f_n\circ\gamma\, d\gamma_n$$
et donc
$$\int_\gamma \omega = \int_{S^1} f_1\circ\gamma_1\, d\gamma_1 + \dots + f\circ\gamma_n\, d\gamma_n$$

ii- Remarquons que $h([0,2\pi]) = S^1$

De la définition de ci-dessus, on a

$$\int_{S^1} \omega = \oint_{S^1} \omega$$

où on considère S^1 comme une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^2$ (γ est l'injection $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$)

Donc $\omega(x,y) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$

$$\oint_{S^1} \omega = \int_{S^1} f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} f_1(h(t))\,d(\cos t) + f_2(h(t))\,d(\sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi} h^*\omega$$

iii- $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} h^*\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$