Géométrie différentielle

Exercices

Exercice No. 1

Montrer que l'ensemble $SL(2, \mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels dont le déterminant est égal à un est une sous-variété de $M(2, \mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? Déterminer l'espace tangent à $SL(2, \mathbb{R})$ au point I_2 (I_2 est la matrice identité).

~~Preuve~~ Solution

On définit l'application

$$g : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow g(A) = \det A$$

Il suffit de montrer que 1 est une valeur régulière de g, c'est à dire montrer que

$$Dg(A) : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est surjective pour $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_1 \ \ a_2) \in SL(2, \mathbb{R})$

$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_1 \ \ h_2) \in M(2, \mathbb{R})$.

Alors

$$g(A+H) - g(A) = \det(a_1, h_2) + \det(h_1, a_2) + \det(h_1, h_2)$$

d'où

$$g(A+H) - g(A) - \{\det(a_1, h_2) + \det(h_1, a_2)\} = \det(h_1, h_2)$$

Posons $L(H) = \det(a_1\ h_2) + \det(h_1\ a_2)$

$L : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire

En plus

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{|g(A+H) - g(A) - L(H)|}{\|H\|} = \lim_{\|H\| \to 0} \frac{|\det(H)|}{\|H\|} = 0$$

Donc g est différentiable au pt A et

$$Dg(A)H = \det(a_1\ h_2) + \det(h_1\ a_2)$$

Pour $H = A$, on a :

$$Dg(A)(A) = 2 \det A = 2 \neq 0$$

Donc $Dg(A)$ est surjective, et par conséquent $SL(2, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $M(2, \mathbb{R})$ de dimension 3.

$$T_{I_2} SL(2, \mathbb{R}) = \operatorname{Ker} Dg(I_2)$$

$$H \in \operatorname{Ker} Dg(I_2) \iff Dg(I_2)(H) = 0$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff h_{22} + h_{11} = 0$$

D'où

$$T_{I_2} SL(2, \mathbb{R}) = \{ H \in M(2, \mathbb{R}) : \operatorname{tr} H = 0 \}$$

Exercice No. 2.

Montrer que l'ensemble
$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + 2x + 2y - z = 0 \}$$
est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Solution

Soit
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow xy + xz + 2x + 2y - z$$

Alors $M = f^{-1}(\{0\})$.

Montrons que 0 est une valeur régulière de f,

c.a.d $Df(p) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

est surjective pour $p \in M$.

Pour $p = (p_1, p_2, p_3)$ et $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

On a $Df(p)h = (p_2 + p_3 + 2)h_1 + (p_1 + 2)h_2 + (p_1 - 1)h_3$

$Df(p)h = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^3$ si

$p_2 + p_3 - 2 = 0$, $p_1 + 2 = 0$ et $p_1 - 1 = 0$

Ceci est impossible donc $Df(p)$ est surjective.

M est alors une sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. ∎

Exercice No. 3

On considère l'ensemble $P = \{ A \in M(2, \mathbb{R}) : A \neq 0, A \neq I_2$ et $A^2 = A \}$

(i) Montrer que $A \in P$ si $(\det A, \operatorname{tr} A) = (0, 1)$

(ii) En déduire que P est une sous-variété de $M(2, \mathbb{R})$ de dimension 2.

Solution

i) $A \in P \Rightarrow \det A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 1$?

Soient $A \in P$ et λ une valeur propre de A. Soit x un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ.

Alors $$Ax = \lambda x$$

et $$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

Mais $A^2 = A$; donc $\lambda(\lambda - 1)x = 0$

Puisque $A \neq 0$ et $A \neq I_2$, les valeurs propres de A sont 0 et 1. D'où $\det A = 0$

et $\operatorname{tr} A = 1$.

$\det A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 1 \Rightarrow A \in P$?

Par hypothèse les valeurs propres de A sont 0 et 1

et donc $A \neq 0$ et $A \neq I_2$.

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs propres de A correspondants respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

Alors $$A^2 x_1 = A(Ax_1) = A(\lambda x_1) = 0 = Ax_1$$

et $$A^2 x_2 = A(Ax_2) = Ax_2.$$

Donc $$A^2 = A$$

et par conséquent $A \in P$.

ii) Considérons l'application $f : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$A \longrightarrow f(A) = (\det A, \operatorname{tr} A)$$

et montrons que $(0, 1)$ est une valeur régulière de f.

Soit $H \in M(2,\mathbb{R})$ et posons

$$A = (a_1 \ \ a_2) \quad \text{et} \quad H = (h_1 \ \ h_2)$$

ou $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, $h_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$

On a

$$Df(A)(H) = \left(\det(a_1\ h_2) + \det(h_1\ a_2),\ \operatorname{tr} H\right)$$

$Df(A)$ est surjective. En fait pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ ~~ex~~ le système algébrique suivant

$$\begin{cases} \det(a_1\ h_2) + \det(h_1, a_2) = \alpha \\ \operatorname{tr} H = \beta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_{11}h_{22} - a_{21}h_{12} + h_{11}a_{22} - a_{12}h_{21} = \alpha \\ h_{11} + h_{22} = \beta \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

a une solution car la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de ~~plein~~ rang 2 pour $A \in P$.