Université de Batna 2
Faculté M.I.
Département de Mathématiques

1ère Année Master Mathématiques Appliquées

25-06-2019

Géométrie différentielle

Interrogation écrite

Exercice No. 1
(i) Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^3 \end{aligned}$$

est différentiable en tout point x de $\mathbb{R}$ et déterminer $Df(x)h$.
(ii) Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} g : M(n, \mathbb{R}) &\to M(n, \mathbb{R}) \\ A &\to A^3 \end{aligned}$$

est différentiable en tout point A de $M(n, \mathbb{R})$ et déterminer $Df(A)H$. ($M(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels).
Exercice No. 2
Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ la boule unité ouverte de l'espace $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f &: U \to \mathbb{R}^n, \\ x &\to \frac{x}{1 - \|x\|^2} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Exercice No. 1 (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow x^3$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3$$

$$= (x+h)(x^2 + 2hx + h^2) - x^3$$

$$= (x^3 + 2hx^2 + xh^2 + hx^2 + 2h^2x + h^3) - x^3$$

$$= 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

Donc $f(x+h) - f(x) - (3hx^2) = 3h^2x + h^3$

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - (3x^2h)|}{|h|} = \frac{|3h^2x + h^3|}{|h|} \leq 3|x||h| + |h|^2 \to 0 \text{ qd } |h| \to 0$$

En plus $L(h) = 3x^2h$ est linéaire

f est alors différentiable en tout pt $x \in \mathbb{R}$

et $Df(x)h = 3x^2h$

(ii) $g : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$

$$A \longrightarrow g(A) = A^3$$

$$g(A+H) - g(A) = (A+H)^3 - A^3$$

$$= (A+H)(A+H)(A+H) - A^3$$

$$= (A+H)(A^2 + AH + HA + H^2) - A^3$$

$$= A^3 + A^2H + AHA + AH^2 + HA^2 + HAH + H^2A + H^3 - A^3$$

$$= A^2H + AHA + HA^2 + AH^2 + HAH + H^2A + H^3$$

Donc

$$g(A+H) - g(A) - (A^2H + AHA + HA^2) = AH^2 + HAH + H^2A + H^3$$

Posons $L(H) = A^2H + AHA + HA^2$

L est linéaire, en plus

$$\frac{\|g(A+H) - g(A) - L(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|AH^2 + HAH + H^2A\|}{\|H\|}$$

$$\leq \frac{\|A\|\|H\|^2 + \|A\|\|H\|^2 + \|H\|^2\|A\|}{\|H\|}$$

$\leq 3\|A\|\|H\| \to 0$ qd $\|H\| \to 0$

Donc g est différentiable en toute matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ et $Dg(A)H = A^2H + HAH + HA^2$

Exercice No. 2

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1 - \|x\|^2}$$

On a $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$

Les composants de f sont des fcts rationnelles et puisque $\|x\| < 1$, alors elles sont différentiables,

donc f est différentiable sur $\|x\| < 1$.

Montrons que f^{-1} existe ; $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$

On a $y = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$

donc $y_i = \frac{x_i}{1 - \|x\|^2}$

$$\|y\|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1-\|x\|^2)^2}$$

Posons $\|y\|^2 = Y$, $\|x\|^2 = X$, alors

$$Y(1-X)^2 = X$$

$$Y(1+X^2-2X) = X$$

$$Y + YX^2 - 2YX = X \quad \text{ou} \quad YX^2 - (2Y+1)X + Y = 0$$

$$\Delta = (2Y+1)^2 - 4Y^2 = 4Y^2 + 4Y + 1 - 4Y^2$$

$$\Delta = 4Y+1 > 0$$

$$X = \frac{2Y+1-\sqrt{4Y+1}}{2Y} \quad \text{(voir ci-dessous)}$$

$$y_i = \frac{x_i}{1-\frac{2Y+1-\sqrt{4Y+1}}{2Y}} = x_i\frac{2Y}{2Y-2Y-1+\sqrt{4Y+1}}$$

$$= x_i\frac{2Y}{-1+\sqrt{4Y+1}}$$

Alors

$$x_i = \frac{\sqrt{4Y+1}-1}{2Y}y_i$$

$$= \frac{4Y+1-1}{2Y(\sqrt{4Y+1}+1)}y_i = \frac{2}{\sqrt{4Y+1}+1}y_i$$

$$= \frac{2y_i}{\sqrt{4\|y\|^2+1}+1}$$

On a choisi cette racine parceque

$$\|x\|^2 = \left| \frac{4\|y\|^2}{\sqrt{4\|y\|^2+1}+1} \right| \leq 1$$

Donc

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{\sqrt{4\|y\|^2+1}+1}$$

Les composants sont des fcts definis sur $\mathbb{R}^n$ et differentiables donc f^{-1} est differentiable.

f est alors un difféomorphisme.