Chapitre I.

Contrôlabilité et Observabilité

I.1. Contrôlabilité

Soient :

- Y et U deux espaces de Hilbert
- A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y.
- B un opérateur linéaire borné de U dans Y

Considérons dans Y, le système de contrôle décrit par

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \qquad (SC)$$

où

- $y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$,
- $y(t) \in Y$ est l'état du système et Y est l'espace d'état.
- $u(t) \in U$ est le contrôle et U est l'espace des contrôles.

Soit $T > 0$ et supposons que $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$

1.1.1 Def Le système (SC) (ou la paire (A,B)) est dit(e) exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ si pour tout $y_0, y_d \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T,U)$ tq

$$y(T) = y_d$$

où $y(T)$ est solution de (SC) à l'instant T correspondante à la donnée initiale y_0.

1.1.2 Def La paire (A, B) est dite approximativement contrôlable dans Y sur $[0, T]$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $y_0, y_1 \in Y$; il existe $u(\cdot) \in L^2(0, T; V)$ tq

$$\|y(T) - y_1\| < \varepsilon$$

1.1.3. Def La paire (A, B) est dite exactement nul contrôlable dans Y sur $[0, T]$ si pour tout $y_0 \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0, T; V)$ tq

$$y(T) = 0.$$

1.2. Caractérisations de la contrôlabilité exacte et de la contrôlabilité approchée

Pour $y_0 \in Y$ et $u(\cdot) \in L^2(0, T; V)$, la solution de (SC) est donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau$$

où y_0 est la donnée initiale.

Introduisons l'opérateur

$$L_T : L^2(0, T; V) \longrightarrow Y$$
$$u \longrightarrow L_T u$$

où $L_T u = \int_0^T S(T-\tau) Bu(\tau)\, d\tau$

Evidemment, L_T est borné

1.2.1. Proposition

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ ssi l'opérateur L_T est surjectif.

Preuve

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$, alors pour tout $y_0, y_1 \in Y$; il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq

$$y_1 = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

$$= S(T)y_0 + L_T u$$

ou $L_T u = y_1 - S(T)y_0$

Donc L_T est surjectif.

Supposons que L_T est surjectif et soient $y_0, y_1 \in Y$ alors $y_1 - S(T)y_0 \in Y$, donc il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq $y_1 - S(T)y_0 = L_T u$

ou $y_1 = S(T)y_0 + L_T u$

et par conséquent (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$. ∎

1.2.2. Théorème

La paire (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ ssi il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \|B^* S^*(t)y\|_U^2\,dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$$

Pour la démonstration, on a besoin du résultat suivant.

1.2.3. Théorème

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $H : E \to F$ un opérateur linéaire borné. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) H est surjectif

(ii) Il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in F$, on a

$$\|H^* y\|_E \geq \gamma \|y\|_F$$

Preuve du théorème 1.2.2.

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$

$\iff L_T$ est surjectif

$\iff$ Il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\|L_T^* y\|^2_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|^2_Y$$

Déterminons L_T^*.

On a $L_T : L^2(0,T;U) \longrightarrow Y$

et donc $L_T^* : Y \longrightarrow L^2(0,T;U)$

Soient $y \in Y$ et $u \in U$. On a d'une part

$$\langle y, L_T u\rangle_Y = \langle L_T^* y, u\rangle_{L^2(0,T;U)}$$

et d'autre part

$$\langle y, L_T u\rangle_Y = \langle y, \int_0^T S(T-\tau) B u(\tau)\, d\tau\rangle_Y$$

$$= \int_0^T \langle y, S(T-\tau) B u(\tau)\rangle_Y \, d\tau$$

$$= \int_0^T \langle B^* S^*(T-\tau) y, u(\tau)\rangle_U \, d\tau$$

$$= \langle B^* S^*(T-\cdot) y, u(\cdot)\rangle_{L^2(0,T;U)}$$

Donc

$$(L_T^* y)(\tau) = B^* S^*(T-\tau) y \quad , \quad \tau \in [0,T]$$

et par conséquent

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$

$\Leftrightarrow$ il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \| B^* S^*(T-\tau) y\|_U^2 \, d\tau \geqslant \gamma \|y\|_Y^2$$

$\Leftrightarrow$ il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \| B^* S^*(\tau) y\|_U^2 \, d\tau \geqslant \gamma \|y\|_Y^2$$

∎

1.2.4 Théorème

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$

ssi $\overline{\mathrm{Im} L_T} = Y$

Preuve

$\overline{\mathrm{Im}\, L_T} = Y \iff \forall \varepsilon > 0$ et $\forall y \in Y$, il existe $\tilde{y} \in \mathrm{Im}\, L_T$ tq $\|y - \tilde{y}\| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0$, et $\forall y_0, y \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2([0,T];V)$ tq $\left\| y - S(T)y_0 - \int_0^T S(T-\tau) Bu(\tau)\, d\tau \right\| < \varepsilon$

$\iff$ (A,B) est approx. contrôlable ds Y sur $[0,T]$. ∎

1.25. Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (A,B) est approximativement contrôlable ds Y sur $[0,T]$.

(ii) $B^* S^*(t) y = 0$ sur $[0,T] \Rightarrow y = 0$.

Preuve

(A,B) est approximativement contrôlable ds Y sur $[0,T]$

ssi $\overline{\mathrm{Im}\, L_T} = Y$.

Mais $Y = \overline{\mathrm{Im}\, L_T} \oplus \left(\overline{\mathrm{Im}\, L_T}\right)^{\perp}$

$= \overline{\mathrm{Im}\, L_T} \oplus \ker L_T^*$

Donc (A,B) est approximativement contrôlable ds Y sur $[0,T]$ ssi $\ker L_T^* = \{0\}$

ssi $(L_T^* y)(\tau) = 0$ sur $[0,T] \Rightarrow y = 0$

ssi $B^* S^*(T-\tau) y = 0$ sur $[0,T] \Rightarrow y = 0$

ssi $B^* S^*(t) y = 0$ sur $[0,T] \Rightarrow y = 0$.

1.26. Exemple

Montrer que le système de contrôle décrit par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) & , 0<x<1,\ t>0 \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

n'est pas exactement contrôlable ds $Y = L^2(0,1)$ sur $[0,T]$, quelque soit $T>0$, cependant il est approximativement contrôlable.

Réponse

On réécrit le système sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

où $A : D(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

et $D(A) = \left\{ f \in Y ;\ \dfrac{df}{dx},\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} \in Y,\ f(0) = f(1) = 0 \right\}$

$B : U = L^2(0,1) \longrightarrow Y$ avec $Bf = f$

A est un opérateur spectral de Riesz engendrant un C_0-sgpe $S(t)$ donné par

$$S(t)y = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle$$

où $\lambda_n = -n^2\pi^2$, et $\varphi_n = \sqrt{2}\sin n\pi x$

λ_n sont les valeurs propres de A et φ_n sont les fcts propres correspondantes

A est auto-adjoint donc $S(t)$ l'est aussi

$B = B^* = Id_Y$

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ ssi il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y\|_U^2 \, dt \geq \gamma \|y\|_Y^2 \qquad (\text{Ineq})$$

Pour ce système on a

$$B^* S^*(t) y = B S(t) y = S(t) y$$

et

$$\|B^* S^*(t) y\|_U^2 = \|S(t)y\|_{L^2(0,1)}^2 = \langle S(t)y, S(t)y \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t}\langle y, \varphi_n\rangle \varphi_n, \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t}\langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\lambda_n t}\left(\langle y, \varphi_n\rangle\right)^2$$

Donc

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y\|_U^2 \, dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\lambda_n t}\left(\langle y, \varphi_n\rangle\right)^2 dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^T e^{2\lambda_n t} dt\right)\left(\langle y, \varphi_n\rangle\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\lambda_n}\left(e^{2\lambda_n T} - 1\right)\left(\langle y, \varphi_n\rangle\right)^2$$

et l'inégalité (Ineq) se réécrit comme suit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\lambda_n}\left(e^{2\lambda_n T}-1\right)\left(\langle y,\varphi_n\rangle\right)^2 \geq \gamma \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\langle y,\varphi_n\rangle\right)^2$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-e^{-2n^2\pi^2 T}\right)\left(\langle y,\varphi_n\rangle\right)^2 \geq \gamma \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\langle y,\varphi_n\rangle\right)^2$$

et pour $y=\varphi_k$, on a

$$\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-e^{-2k^2\pi^2 T}\right)-\gamma \geq 0.$$

~~Mais il existe $k \in \mathbb{N}$, tq l'inégalité de ci-dessus n'est pas vérifiée quelque soit $\gamma>0$.~~

Mais quelque soit $\gamma>0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tq l'inégalité de ci-dessus n'est pas vérifiée.

Donc la paire (A,B) n'est pas exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$.

Cependant

$$B^*S^*(t)y=0 \text{ sur } [0,T] \Rightarrow S(t)y=0 \text{ sur } [0,T]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t}\langle y,\varphi_n\rangle\varphi_n=0 \text{ sur } [0,T]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\langle y,\varphi_n\rangle\varphi_n=0 \text{ sur } [0,T]$$

$$\Rightarrow y=0$$

Ce qui implique (A,B) est approximativement contrôlable dans Y sur $[0,T]$.

1.3. Observabilité

Soient : Y et Z deux espaces de Hilbert
. A le générateur infinitésimal d'un C_0-sgpe $S(t)$ sur Y
. C un opérateur linéaire borné de Y dans Z.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ z(t) = Cy(t) \end{cases} \qquad (SO)$$

1.3.1. Def

Le système (SO) ~~ou~~ la paire (A,C) est dit(e) exactement observable dans sur $[0,T]$ si l'état initial $y(0)$ peut-être déterminé d'une façon unique et unique de la connaissance de $z(\cdot) \in L^2(0,T;Z)$.

1.3.2 Def

Le système (SO) ou la paire (A,C) est dit(e) approximativement observable dans Y sur $[0,T]$ si la connaissance de la sortie $z(\cdot) \in L^2(0,T;Z)$ détermine d'une façon unique l'état initial $y(0)$.

1.4. Caractérisations des deux concepts d'observabilité

Introduisons l'opérateur

$$\mathcal{C}_T : Y \longrightarrow L^2(0,T;Z)$$
$$y \longrightarrow \mathcal{C}_T y = CS(\cdot)y$$

1.4.1. Proposition

(A,C) est exactement observable ssi $\mathcal{C}_T$ est injectif et $\mathcal{C}_T^{-1}$ est borné sur $\operatorname{Im}\mathcal{C}_T$.

Preuve

On a $z(t) = Cy(t)$
$$= CS(t)y(0) = CS(t)y_0$$
$$= (\mathcal{C}_T y_0)(t)$$

Formellement, on a $y_0 = (\mathcal{C}_T)^{-1}z(t)$

Mais ceci d'une se fait d'une façon unique et continue ssi (A,C) est exactement observable.

Alors $\mathcal{C}_T$ est injectif et $\mathcal{C}_T^{-1} : \operatorname{Im}\mathcal{C}_T \longrightarrow Y$ est borné.

Réciproquement, $\mathcal{C}_T : Y \longrightarrow L^2(0,T;Z)$ injectif donc $\mathcal{C}_T^{-1}$ existe. En plus on a

$$\mathcal{C}_T^{-1} : \cancel{L^2(0,T;Z)}\ \operatorname{Im}\mathcal{C}_T \longrightarrow Y$$

borné, donc $y_0 = (\mathcal{C}_T)^{-1}z(t)$.

1.4.2 Proposition

(A,C) est exactement observable dans Y sur $[0,T]$ ssi $\ker \mathcal{C}_T = \{0\}$

Preuve

(A,C) est approximativement observable sur $[0,T]$

$\Leftrightarrow$ $y_0 = y(0)$ se détermine d'une façon unique de la connaissance de $z(\cdot) \in L^2(0,T;Z)$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_T$ est injectif

$\Leftrightarrow$ $\ker \mathcal{C}_T = \{0\}$.

1.5. Dualité

1.5.1. Théorème

La paire (A,B) est exactement (approximativement) controlable dans Y sur $[0,T]$ ssi la paire (A^*,B^*) est exactement (approximativement) observable dans Y sur $[0,T]$.

Preuve

(i) (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$

$\Leftrightarrow$ il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \|L_T^* y\|_U^2 \, dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$$

$\Leftrightarrow$ L_T^* est injectif et $(L_T^*)^{-1} : \operatorname{Im} L_T^* \to L^2(0,T;U)$ est borné

$\Leftrightarrow$ (A^*,B^*) est exactement observable dans Y sur $[0,T]$.

(ii) (A, B) est approximativement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ $\iff$ $\ker L_T^* = \{0\}$

$\iff$ (A^*, B^*) est approximativement observable dans Y sur $[0,T]$.

1.6. Contrôle optimal

Soient Y et U deux espaces de Hilbert, et considérons dans Y le système de contrôle décrit par

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

où A et B sont comme ci-dessus.

Supposons que ce système est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$; alors il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \| B^* S^*(t) y \|_U^2 \, dt \geq \gamma \|y\|_Y^2 \qquad (\text{Ineg})$$

On réécrit le terme de gauche de cette inégalité comme suit

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y\|_U^2 \, dt = \int_0^T \langle B^* S^*(t) y, B^* S^*(t) y \rangle_U \, dt$$

$$= \int_0^T \langle y, S(t) B B^* S^*(t) y \rangle_Y \, dt$$

$$= \langle y, \int_0^T S(t) B B^* S^*(t) y \, dt \rangle_Y$$

Posons

$$\Lambda_T = \int_0^T S(t) B B^* S^*(t) y \, dt$$

L'inégalité (Ineq) devient

$$\langle y, \Lambda_T y \rangle \geq \gamma \|y\|_Y^2$$

Λ_T coercive et inversible

1.6.1 Théorème

Le contrôle $\hat{u} = -B^* \varphi(t)$ où φ est solution de

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -A^* \varphi(t) \\ \varphi(T) = \Lambda_T^{-1}(S(T)y_0 - y_1) \end{cases}$$

transfère l'état de y_0 à y_1. En plus il minimise la fonctionnelle

$$\int_0^T \|\hat{u}(t)\|_U^2 \, dt$$

Preuve

(i) $y(T) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)B\hat{u}(\tau)\,d\tau$

$= S(T)y_0 - \int_0^T S(T-\tau)BB^*\varphi(\tau)\,d\tau$

$= S(T)y_0 - \int_0^T S(T-\tau)BB^*S^*(T-\tau)\Lambda_T^{-1}(S(T)y_0 - y_1)\,d\tau$

$= S(T)y_0 - \Lambda_T\Lambda_T^{-1}(S(T)y_0 - y_1) = y_1$

(ii) Soit $u(\cdot)$ un contrôle arbitraire transférant le système de y_0 à y au temps T. Alors

$$\int_0^T \langle u(t), \hat{u}(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(t), B^* S^*(T-t) \Lambda_T^{-1} (S(T)y_0 - y_1) \rangle dt$$

$$= -\left\langle \int_0^T S(T-t) B u(t)\, dt, \Lambda_T^{-1} (S(T)y_0 - y_1) \right\rangle$$

$$= \langle S(T)y_0 - y_1, \Lambda_T^{-1} (S(T)y_0 - y_1) \rangle$$

Mais on vérifie que

$$\int_0^T \|\hat{u}(t)\|_U^2 dt = \langle \Lambda_T^{-1} (S(T)y_0 - y_1), S(T)y_0 - y_1 \rangle$$

Donc

$$\int_0^T \langle u(t), \hat{u}(t) \rangle dt = \int_0^T \|\hat{u}(t)\|^2 dt$$

De ceci on obtient

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \int_0^T \|u(t) - \hat{u}(t)\|_U^2 dt + \int_0^T \|\hat{u}(t)\|^2 dt$$

$$\geq \int_0^T \|\hat{u}(t)\|^2 dt$$

■