Chapitre 2. Stabilité et Stabilisation

2.1. Stabilité exponentielle

2.1.1 Définition.

Un C_0-semigroupe $S(t)$ ~~est~~ sur un espace de Hilbert Y est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives M et ω telles que

$$\|S(t)\| \leq M e^{-\omega t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

ω est le taux de décroissance

$\sup \omega$ marge de stabilité.

Si $S(t)$ est exponentiellement stable alors la solution du problème de Cauchy abstrait

$$y'(t) = Ay(t), \quad t > 0$$
$$y(0) = y_0$$

tend vers 0 exponentiellement qd $t \to +\infty$.

Ici A est le générateur infinitésimal de $S(t)$.

2.1.2. Théorème (Théorème de Datko)

Un C_0-semigroupe $S(t)$ sur un espace de Hilbert Y est exponentiellement stable ssi pour chaque $y \in Y$ on a

$$\int_0^{+\infty} \|S(t)y_0\|_Y \, dt < +\infty.$$

2.1.3 Théorème

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-sgpe $S(t)$ sur un espace de Hilbert Y. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $S(t)$ est exponentiellement stable.

(ii) Il existe un opérateur positif $P \in \mathcal{L}(Y)$ tel que

(*) $\langle Ay, Py \rangle + \langle Py, Ay \rangle = -\langle y, y \rangle \quad , \quad y \in D(A)$

(iii) Il existe un opérateur positif $P \in \mathcal{L}(Y)$

tq $\quad \langle Ay, Py \rangle + \langle Py, Ay \rangle \leq 0.$

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque $S(t)$ est exp. stable, l'opérateur P défini par

$$\langle y_1, Py_2 \rangle = \int_0^{+\infty} \langle S(t)y_1, S(t)y_2 \rangle dt$$

est bien défini, et puisque

$$|\langle y_1, Py_2 \rangle| \leq \int_0^{+\infty} \|S(t)y_1\| \|S(t)y_2\| dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} M^2 e^{-2\omega t} \|y_1\| \|y_2\| dt = \frac{M^2}{2\omega} \|y_1\| \|y_2\|$$

P est borné. En plus,

$$\langle y, Py \rangle = \int_0^{+\infty} \|S(t)y\|^2 dt \geq 0$$

et $\langle y, Py \rangle = 0$ implique que $\|S(t)y\| = 0$ sur $[0, +\infty[$ et la continuité forte de $S(t)$ implique que $y = 0$.

Ainsi $P > 0$.

Montrons que P vérifie l'équation de Lyapunov (*).

Pour $y \in D(A)$, on a

$$\langle Ay, Py \rangle + \langle Py, Ay \rangle = \int_0^{+\infty} \{ \langle S(t)Ay, S(t)y \rangle + \langle S(t)y, S(t)Ay \rangle \} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \langle S(t)y, S(t)y \rangle \, dt = 0 - \langle y, y \rangle$$

Donc P est une solution de $(*)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) évidente

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons qu'il un operateur borné $P > 0$ solution de l'inéquation

$$\langle Ay, Py \rangle + \langle Py, Ay \rangle \leq - \langle y, y \rangle$$

et on introduit la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t, y) = \langle PS(t)y, S(t)y \rangle$$

Puisque P est positif, $V(t,y) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Pour $y \in D(A)$, on a

$$\frac{d}{dt} \langle PS(t)y, S(t)y \rangle = \langle PAS(t)y, S(t)y \rangle + \langle PS(t)y, AS(t)y \rangle \leq - \|S(t)y\|^2$$

L'intégration donne

$$0 \leq V(t,y) \leq V(0,y) - \int_0^T \|S(t)y\|^2 dt$$

D'où

$$\int_0^T \|S(t)y\|^2 dt \leq V(0,y) = \langle Py, y \rangle$$

pour tout $y \in D(A)$, et cette inégalité reste vraie pour tout $y \in Y$ car $D(A)$ est dense dans Y. En d'autres termes on a pour chaque $y \in Y$;

$$\int_0^{+\infty} \|S(t)y\|_Y^2 \, dt < +\infty$$

et le théorème de Datko donne le résultat désiré.

2.1.4. Remarque

En dimension finie, la stabilité exponentielle peut être déterminée à partir du spectre de l'opérateur, puisque

$$\sup\{Re(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \omega_0$$

Il est montré que ceci reste vrai pour les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Cependant, en général, seulement l'inégalité suivante est vraie

$$\sup\{Re(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\} \leq \omega_0$$

et qui peut être strict comme le montre l'exemple donné dans [Curtain & Zwart, pp. 157].

2.2. Stabilisabilité

Considérons le système de contrôle décrit par

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \qquad (SC)$$

où :

. A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $S(t)$ sur un espace de Hilbert Y.

. $B \in \mathcal{L}(U, Y)$, U est un autre espace de Hilbert.

2.2.1 Définition

S'il existe $F \in \mathcal{L}(Y, U)$ tq $A+BF$ engendre un C_0-semigroupe $S_{BF}(t)$ exponentiellement, alors on dit que la paire (A, B) (ou le système (SC)) est stabilisable exponentiellement.

2.3. Stabilisabilité des systèmes linéaires décrits par des groupes

2.3.1. Théorème

Si :

(i) A engendre un groupe unitaire $S(t)$ sur Y,

c.à.d. $A^* = -A$

(ii) (A, B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0, T]$ pour $T > 0$.

Alors le contrôle $u(\cdot)$ donné par

$$u(t) = -B^* y(t)$$

stabilise exponentiellement le système (S)

Preuve

On a formellement pour $u(\cdot) \in C^1([0,T]; Y)$ et $y \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \cancel{S(t)} y(t), y(t)\rangle$$

$$= \langle y'(t), y(t)\rangle + \langle y(t), y'(t)\rangle$$

$$= \langle Ay(t) + Bu(t), y(t)\rangle + \langle y(t), Ay(t) + Bu(t)\rangle$$

$$= \langle y(t), (A^* + A)y(t)\rangle + 2\langle u(t), B^* y(t)\rangle$$

$$= 2\langle u(t), B^* y(t)\rangle$$

En choisissant $u(t) = -B^* y(t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = -2\|B^* y(t)\|^2$$

et donc

$$\|y(t)\|^2 - \|y(0)\|^2 = -\int_0^t \|B^*y(s)\|^2 ds \quad (Q1)$$

Montrons maintenant que le contrôle $u = -B^*y$ stabilise exponentiellement le système (S1).

Puisque B est borné, BB^* est aussi borné et par conséquent $A - BB^*$ engendre un C_0-semigroupe sur Y. Pour montrer qu'il est exponentiellement stable, il suffit d'établir l'existence de $T > 0$ et $c > 0$, telles que

$$\|y(0)\|^2 \leq c\int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt \quad (Q2)$$

pour toute solution de

$$\begin{cases} y' = (A - BB^*)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En effet de (Q1) et (Q2), on obtient

$$\|y(T)\|^2 - \|y(0)\|^2 \leq -\frac{2}{c}\|y(0)\|^2$$

et par conséquent

$$\|y(T)\|^2 \leq \gamma\|y(0)\|^2 \quad \text{où } \gamma = 1 - \frac{2}{c} < 1$$

Ainsi

$$\|y(2T) \leq \gamma\|y(T)\|^2 \leq \gamma^2\|y(T)\|^2$$

$$\vdots$$

$$\|y(kT)\| \leq \gamma^k\|y(0)\|^2 = e^{-|\log\gamma| k}\|y(0)\|^2$$

Maintenant pour tout $t > 0$, on a $t = kT + \delta$ où $k \in \mathbb{N}$ et $\delta \in [0, T[$.

et donc

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(kT)\|^2 \quad \text{parceque } t > kT$$

$$\leq e^{-|\log\gamma| k}\|y(0)\|^2$$

$$\leq \exp\left(-|\log\gamma|\frac{t}{T}\right)\exp\left(|\log\gamma|\frac{\delta}{T}\right)\|y(0)\|^2$$

$$\leq \frac{1}{\gamma^{\frac{\delta}{T}}}\exp\left(-|\log\gamma|\frac{t}{T}\right)\|y(0)\|^2$$

Pour montrer l'inégalité (Q2), on décompose la solution y comme suit

$$y = \varphi + \psi$$

où φ est solution du systeme suivant

$$\begin{cases} \varphi' = A\varphi \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

et ψ est solution de

$$\begin{cases} \psi' = A\psi - BB^* y \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

Puisque (A, B) est exactement controlable, alors il existe $c_1 > 0$ tq

$$\|y(0)\|^2 \leq c_1 \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 dt$$

Comme $\varphi = y - \psi$, on déduit que

$$\|y(0)\|^2 \leq 2c_1 \int_0^T \|B^* y(t)\|^2 dt + \int_0^T \|B^*\psi(t)\|^2 dt.$$

Mais
$$\psi(t) = -\int_0^T S(T-t)\, BB^* y(t)\, dt$$
D'où on conclut que
$$\|y(t)\| \leq c \int_0^T \|B^* y(t)\|^2 dt$$

2.3.2. Théorème

Supposons que :

(i) A engendre un C_0-groupe sur un espace de Hilbert Y.

(ii) (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$.

Alors pour tout $\omega > 0$, il existe $F \in \mathcal{L}(Y,U)$ ~~telle~~ tq $A+BF$ engendre un C_0-groupe exponentiellement stable.

Preuve

Définissons l'opérateur D par
$$Dy = \int_0^T e^{-2\omega t} S(-t) BB^* S^*(-t) y\, dt$$

Alors $D \in \mathcal{L}(Y,Y)$ est auto-adjoint et puisque (A,B) est exactement contrôlable, il possède un inverse borné.

Maintenant, considérons le système de contrôle donné par

$$y'(t) = (A + \omega I) y(t) + Bu(t)$$

Posons $u(t) = -B^* D^{-1} y(t)$

Alors $A_1 = A + \omega I - BB^* D^{-1}$ est le générateur infinitésimal d'un C₀-groupe $S_1(t)$ sur Y.

Pour $y_0 \in D(A_1^*) = D(A^*)$, on a avec $z(t) = S_1^*(t) y_0$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t), Dz(t) \rangle = 2 \langle \frac{d}{dt} z(t), Dz(t) \rangle$$

$$= 2 \langle (A^* + \omega I - (BB^* D^{-1})^*) z(t), Dz(t) \rangle$$

$$= 2 \langle (A^* + \omega I - D^{-1} BB^*) z(t), Dz(t) \rangle$$

$$= 2 \langle A^* z(t), Dz(t) \rangle + 2\omega \langle z(t), Dz(t) \rangle$$

$$- 2 \langle B^* z(t), B^* z(t) \rangle$$

$$= + 2 \langle \int_0^T e^{-2\omega\tau} S(-\tau) BB^* S^*(-\tau) A^* z(t) \, dt, z(t) \rangle$$

$$- 2\omega \langle Dz(t), z(t) \rangle - 2 \| B^* z(t) \|^2$$

$$= -2 \langle \int_0^T e^{-2\omega\tau} S(-\tau) BB^* \frac{d}{d\tau} S^*(-\tau) z(t) \, d\tau, z(t) \rangle$$

$$- 2\omega \langle Dz(t), z(t) \rangle - 2 \| B^* z(t) \|^2.$$

$$= -\int_0^T \frac{d}{d\tau}\|e^{-\omega\tau} B^* S^*(-\tau) z(t)\|^2 d\tau$$

$$- 2\|B^* z(t)\|^2$$

$$= -\|e^{-\omega T} B^* S^*(-T) S_1^*(t) y_0\|^2 - \|B^* S_1^*(t) y_0\|^2 \leq 0$$

Donc

$$\langle S_1^*(t) y_0, D S_1^*(t) y_0\rangle \leq \langle D y_0, y_0\rangle \leq M_1 \|y_0\|^2$$

D'où

$$M_2 \|S_1^*(t) y_0\|^2 \leq \langle S_1^*(t) y_0, D S_1^*(t) y_0\rangle \leq M_1 \|y_0\|^2$$

et par conséquent

$$\|S_1^*(t) y_0\|^2 \leq M \|y_0\|$$

où $M = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$

et donc $\|S_1(t)\| = \|S_1^*(t)\| \leq M$ pour tout $t \geq 0$.

Soit $S(t)$ le groupe engendré par $A - BB^* D^{-1}$

Alors $S_1(t) = e^{\omega t} S(t)$

Ce qui implique que

$$\|S(t)\| \leq M e^{-\omega t}.$$

I. 4. Stabilisation des systèmes linéaires décrits par des semi-groupes.

Pour un générateur infinitésimal A d'un C_0-semi-groupe $S(t)$, on introduit les hypothèses suivantes :

(H1) Hypothèse de la croissance déterminée par le spectre

$$\sup \operatorname{Re} \sigma(A) = \lim_{t \to +\infty} \log \frac{\|S(t)\|}{t} = \omega_0$$

(H2) Hypothèse de la décomposition du spectre

$$\sigma(A) = \sigma_u(A) \cup \sigma_s(A)$$

où

- $\sigma(A)$ est le spectre de A
- $\sigma_u(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > -\delta \}$
- $\sigma_s(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < -\delta \}$

δ est une constante positive.

Supposons que $\sigma_u(A)$ est borné et qu'il peut être séparé de $\sigma_s(A)$ de telle façon qu'il existe une courbe Γ simplement fermée entourant un ensemble ouvert contenant $\sigma_u(A)$ dans son intérieur et $\sigma_s(A)$ dans son extérieur.

9.4.1. Lemme

L'opérateur P_r défini par

$$P_r y = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} y \, d\lambda$$

est une projection. Cette projection induit une décomposition de l'espace $Y = Y_u \oplus Y_s$

où $Y_u = P_r Y$, $Y_s = (I - P_r) Y$

En plus, on a les propriétés suivantes:

a. Pour tout $s \in \rho(A)$, on a $(sI - A)^{-1} P_r = P_r (sI - A)^{-1}$

b. $P_r Y \subset D(A)$ et $A Y_u \subset Y_u$ et $A(Y_s \cap D(A)) \subset Y_s$

c. Y_u et Y_s sont $(sI - A)^{-1}$-invariant and $S(t)$-invariant.

d. $A|_{Y_u} = A_u$ est un opérateur borné sur Y_u et

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A)$$

e. $A|_{Y_s} = A_s$ et $\sigma(A_s) = \sigma_s(A)$.

f. $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A_u)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}|_{Y_u}$

$$(\lambda I - A_s)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}|_{Y_s}$$

g. $S_u(t) = S(t)|_{Y_u}$ est un C_0-sgpe engendré par A_u

$S_s(t) = S(t)|_{Y_s}$ est un C_0-sgpe engendré par A_s

2.4.2. Résultats de stabilisation

On projette le système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$ sur Y_u et Y_s, on obtient

$$y_u'(t) = A_u y_u(t) + P_p B u(t) \quad (\text{proj sur } Y_u)$$

$$y_s'(t) = A_s y_s(t) + (I - P_p) B u(t) \quad (\text{proj sur } Y_s)$$

et par conséquent

$$y_u(t) = S_u(t) y_{0u} + \int_0^t S(t-\tau) P_p B u(\tau)\, d\tau$$

$$y_s(t) = S_s(t) y_{0s} + \int_0^t S(t-\tau)(I - P_p) B u(\tau)\, d\tau$$

Puisque $A_u \in \mathcal{L}(Y_u)$, $S_u(t) = e^{A_u t}$

2.4.2.1. Théorème

Supposons que A vérifie l'hypothèse de la décomposition du spectre et A_s vérifie l'hypothèse de la croissance déterminée par le spectre. Si $(A_u, P_p B)$ est stabilisable, alors (A, B) est stabilisable.

Preuve

$(A_u, P_p B)$ stabilisable implique qu'il existe $F_u \in \mathcal{L}(Y, U)$ telle que $A_u + P_p B F_u$ engendre un C_0-sgpe $T(t)$ tq

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\varepsilon t}, \quad M, \varepsilon > 0$$

D'où

$$\|u(t)\| = \|F_u y_u(t)\| \leq \|F_u\| \|y_u(t)\|$$

$$\leq \|F_u\| M e^{-\rho t} \|y_{0u}\| = C e^{-\rho t} \|y_{0u}\|$$

avec $C = \|F_u\| M$

D'autre part

$$\|y_s(t)\| \leq M_1 e^{-\delta t} \|y_{0u}\| + \int^t C M_1 e^{-\delta(t-\tau)} e^{-\rho\tau} \|y_{0u}\| d\tau$$

$$\leq M_1 e^{-\delta t} \|y_{0u}\| + C M_1 \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} e^{-\rho\tau} d\tau \right) \|y_{0u}\|$$

$$\leq \left(M_1 e^{-\delta t} + C M_1 e^{-\delta t} \int_0^t e^{(\delta-\rho)\tau} d\tau \right) \|y_{0u}\|$$

$$\leq (M_1 + C M_1) \frac{e^{-\delta t}}{\rho - \delta} \left[e^{(\delta-\rho)t} - 1 \right] \|y_{0u}\|$$

$$\leq \frac{(M_1 + C M_1)}{\rho - \delta} \left(e^{-\delta t} - e^{-\rho t} \right) \|y_{0u}\|$$

▲

2.4.2.2. Corollaire

Si Y_u est de dimension finie et $(A_u, P_r B)$ est contrôlable, alors (A, B) est stabilisable

2.4.2.3. Exemple

Considérons dans $L^2(0,1)$ le système de contrôle décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + 1_{[0,\frac{1}{2}]}(x)\,u(t) & p.p.\ x\in(0,1),\ t>0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0 \end{cases}$$

qu'on peut réécrire sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

où :

- $Af = \frac{d^2 f}{dx^2}$ et $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.
- $B : U = \mathbb{R} \longrightarrow L^2(0,1) = Y$

$$(Bf)(x) = 1_{[0,\frac{1}{2}]}(x)\, f$$

$B \in \mathcal{L}(U,Y)$ et A engendre un C_0-sgpe $S(t)$ donné par

$$S(t)f = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

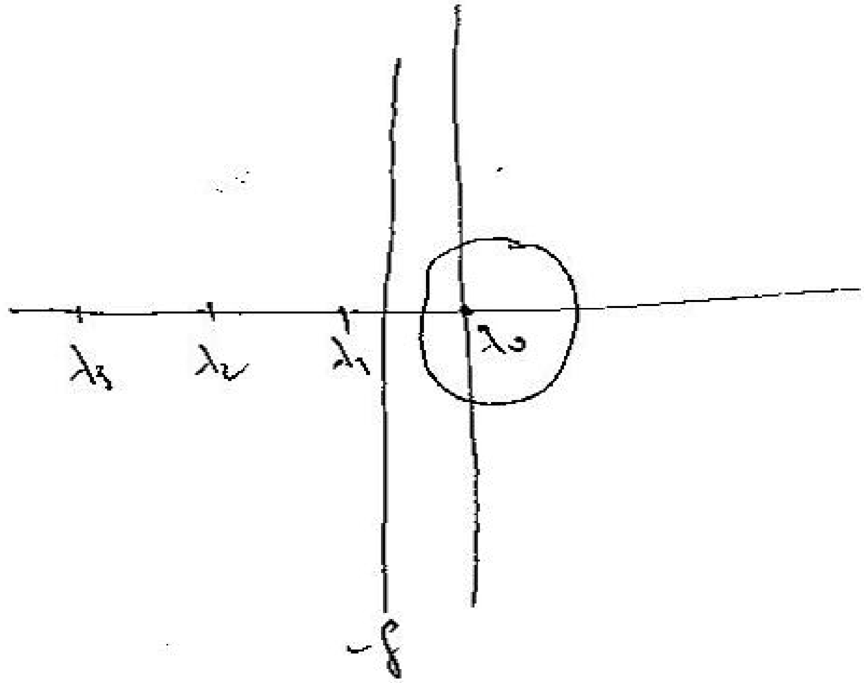
où λ_n sont les valeurs propres de A et φ_n les fonctions propres correspondantes

On a $\lambda_0 = 0$ et $\varphi_0 = 1$

$\lambda_n = -n^2\pi^2$ et $\varphi_n = \sqrt{2}\cos n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$

Remarquons que A vérifie l'hypothèse (H1).

En effet, on a



Soit $0 < \delta < \pi^2$, alors

$$\sigma_u(A) = \{ \lambda \in \sigma(A),\ \mathrm{Re}\,\lambda > -\delta \} = \{0\}$$

$$\sigma_s(A) = \{ \lambda \in \sigma(A),\ \mathrm{Re}\,\lambda < -\delta \} = \{-n^2\pi^2,\ n=1,\dots\}$$

$$Y_u = [\{\varphi_0\}] \quad \text{et} \quad Y_s = \overline{[\{\varphi_n\}_{n\geq 1}]}$$

La projection du système donné sur Y_u est :

$$\langle y'(t), \varphi_0 \rangle = \langle Ay(t), \varphi_0 \rangle + \langle Bu, \varphi_0 \rangle$$

ou

$$\frac{d}{dt} \langle y(t), \varphi_0 \rangle = \langle y(t), A\varphi_0 \rangle + \langle u(t), B^*\varphi_0 \rangle$$

car $A = A^*$ et donc

$$\frac{d}{dt} y_0(t) = \langle u(t), B^*\varphi_0 \rangle \quad \text{puisque } A\varphi_0 = 0.$$

Déterminons $B^*\varphi_0$.

Soient $f \in U$ et $g \in Y$. Alors on a d'une part $\langle Bf, g \rangle_Y = \langle f, B^*g \rangle_U$

et d'autre part

$$\langle Bf, g\rangle_Y = \int_0^1 (Bf)(x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 1_{[0,\frac{1}{2}]}(x)\, f\, g(x)\, dx$$

$$= f \int_0^{1/2} g(x)\, dx$$

Donc $$B^* g = \int_0^{1/2} g(x)\, dx$$

D'où $$B^* \varphi_0 = \int_0^{1/2} \varphi_0(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

et $$\frac{d}{dt} y_0(t) = \frac{1}{2} u(t)$$

La projection sur Y_s est donnée par

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), \varphi_n\rangle = \langle y(t), A\varphi_n\rangle + \langle u(t), B^*\varphi_n\rangle \quad n=1,2,\ldots$$

ou $$\frac{d}{dt}\langle y(t), \varphi_n\rangle = \lambda_n \langle y(t), \varphi_n\rangle + \langle u(t), B^*\varphi_n\rangle$$

qu'on réécrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} y_n(t) = \lambda_n y_n(t) + \langle u(t), B^*\varphi_n\rangle, \quad n=1,2,\ldots$$

où $y_n(t) = \langle y(t), \varphi_n\rangle$,

ou sous la forme matricielle.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u(t), B^*\varphi_1\rangle \\ \langle u(t), B^*\varphi_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Remarquons que
$$A_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$
vérifie l'hypothèse de la croissance déterminée par le spectre. En fait on a
$$\omega_0(S_s(t)) = -\pi^2 = \sup_{\lambda \in \sigma(A_s)} \operatorname{Re} \lambda$$
et $S_s(t)$ est exponentiellement stable.

Le système $\frac{d}{dt} y_0(t) = \frac{1}{2} u(t)$ est contrôlable, donc d'après le corollaire 2.4.2.2, le système donné est exponentiellement stabilisable.

2.5. Detectabilité

Considérons le système suivant
$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ z(t) = Cy(t) \end{cases}$$
où
- A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y
- $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$
- Y et Z sont deux espaces de Hilbert.

2.5.1. Definition

La paire (A,C) est dite détectable si il existe $K \in \mathcal{L}(Z,Y)$ tel que $A+KC$ engendre un C_0-sgpe $S_K(t)$ ~~sur~~ vérifiant l'inégalité

$$\|S_K(t)\| \leq Me^{-\omega t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

$M, \omega > 0$

2.5.2. Théorème

La paire (A,C) est détectable ssi (A^*, C^*) est stabilisable.

Preuve

(A,C) détectable $\Leftrightarrow$ il existe $L \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tq $A+LC$ engendre un C_0-sgpe exp. stable

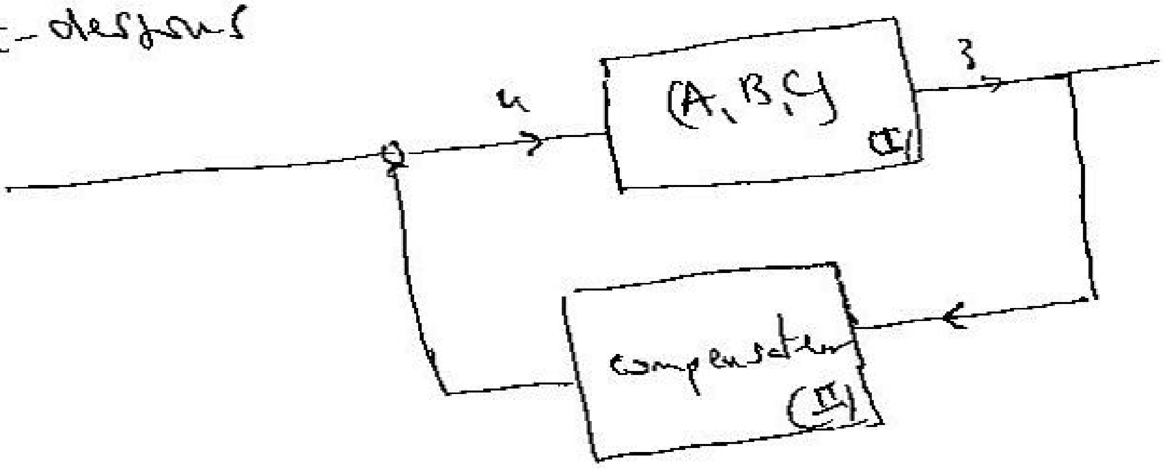
$\Leftrightarrow$ il existe $L \in \mathcal{L}(\cancel{Z},\cancel{Y})$ tq $A^*+(LC)^*$ engendre un C_0-sgpe exp. stable

$\Leftrightarrow$ il existe $L^* = F \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tq A^*+C^*F engendre un C_0-sgpe exp. stable

$\Leftrightarrow (A^*, C^*)$ stabilisable

9.6. Conception de Compensateur

Dans le paragraphe précédent, on a considéré le problème de stabilisation par un retour d'état $u = Fy$. Ceci suppose qu'on peut mesurer tout l'état qui n'est pas possible pour les systèmes de dimension infinie. Une hypothèse naturelle est qu'on peut mesurer une partie de l'état et le problème qui se pose comment on peut stabiliser le système en utilisant seulement des informations partielles sur l'état, comme montré dans le schéma de ci-dessous



Le deuxième système (système II) qui a comme entrée la sortie du système original (syst I), et comme sortie l'entrée du système original est appelé un compensateur et le système composé de (I) et (II) est appelé système à boucle fermée.

9.6.1. Définition : L'observateur de Luenberger

Considérons le système

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cy(t)$$

avec espace d'état Y, espace d'entrée U et espace de sortie Z. Un observateur de Luenberger pour ce système est donné par

$$(OL)\quad \begin{cases} \hat{y}'(t) = A\hat{y}(t) + Bu(t) + L(\hat{z}(t) - z(t)) \\ \hat{z}(t) = C\hat{y}(t) \end{cases}$$

où $L \in \mathcal{L}(Z, Y)$.

9.6.2. Lemme

Si $L \in \mathcal{L}(Z, Y)$ est tel que $A + LC$ engendre un C_0-sg exponentiellement stable alors l'erreur d'approximation

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$$

converge exponentiellement vers zéro qd $t \to +\infty$.

Preuve

On a
$$e'(t) = \hat{y}'(t) - y'(t)$$
$$= A\hat{y}(t) + Bu(t) + L(\hat{z}(t) - z(t)) - Ay(t) - Bu(t)$$
$$= (A + LC)\, e(t)$$

D'où la conclusion désirée.

2.8.3 Théorème

Supposons que (A,B) est stabilisable et que (A,C) est détectable. Si $F \in \mathcal{L}(Y,U)$, $L \in \mathcal{L}(Z,Y)$ sont tels que $A+BF$ et $A+LC$ engendre des C_0-sgpes exponentiellement stables alors le contrôle $u = F\hat{y}$ où $\hat{y}$ est l'observateur de Luenberger stabilise le système en boucle fermée. Le compensateur stabilisant est donné par :

$$\hat{y}'(t) = (A+LC)\hat{y}(t) + Bu(t) - Lz(t)$$
$$u(t) = F\hat{y}(t)$$

Preuve

Le système en boucle fermée est donné par

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + BF\hat{y}(t) \\ \hat{y}(t) = (A+BF+LC)\hat{y}(t) - LCy(t) \end{cases}$$

L'erreur d'approximation $e(t)$ vérifie

$$e'(t) = (A+LC)e(t)$$

D'après le lemme 2.5.2, $e(t) \longrightarrow 0$ exp. qd $t \to +\infty$

Soient $S_{BF}(t)$ et $S_{LC}(t)$ les sgpes engendrés par $A+BF$ et $A+LC$ respectivement

On a par hypothèse

$$\|S_{BF}(t)\| \leq M_F e^{-\omega_F t} \quad \text{et} \quad \|S_{LC}(t)\| \leq M_L e^{-\omega_L t}$$

pour $t \geq 0$, M_F, ω_F, M_F et M_L sont des const. positives.

On a aussi

$$y'(t) = (A + BF)y(t) + \cancel{\ldots} BFe(t)$$

et

$$\hat{y}'(t) = (A + BF)\hat{y}(t) + LCe(t)$$

Ceci implique que le système en boucle fermée est exp. stable.

9.6.4 Exemple

Considérons dans $L^2(0,1)$, le système gouverné par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + 1_{[0,1/2]}(x)u(t), & 0<x<1,\ t>0 \\ y(x,0) = y_0(x) & 0<x<1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0 & t>0 \\ z(t) = \displaystyle\int_0^{1/2} y(x,t)\,dx \end{cases}$$

On réécrit ce système sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$z(t) = Cy(t)$$

où :

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D(A) = \left\{ f \in Y;\ \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{df}{dx} \in Y \text{ et } \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(1) = 0 \right\}$$

- $B : U = \mathbb{R} \longrightarrow Y = L^2(0,1)$
  $f \longrightarrow Bf$ avec $(Bf)(x) = 1_{[0,\frac{1}{2}]}(x) f$

- $C : Y \longrightarrow Z = \mathbb{R}$
  $f \longrightarrow Cf = \int_0^{1/2} f(x)dx$

A engendre un C_0-sgpe $S(t)$ donné par

$$S(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle$$

où $\lambda_0 = 0$ et $\varphi_0 = 1$

$\lambda_n = -n^2\pi^2$ et $\varphi_n = \sqrt{2}\cos n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$

B et C sont des opérateurs linéaires bornés

Ce système est exponentiellement stabilisable (voir Exemple 2.4.2.3). et comme contrôle

on peut prendre $u(t) = -y_0(t)$

$$= -\langle y(t), \varphi_0 \rangle$$

c.a.d. $Fy(t) = -\langle y(t), \varphi_0 \rangle$

Du Théorème 2.5.2, (A, C) est détectable si (A^*, C^*) est stabilisable, et puisque $A^* = A$ et $C^* = B$ et d'après ce qui précède (A, B) est stabilisable et donc (A, C) est détectable. On prend

$$L = F^*$$

Donc $Lz = -z\varphi_0$

Du théorème 2.5.2, un compensateur stabilisant est donné par

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial x^2}(x,t) - \int_0^{1/2} \hat{y}(x,t)\,dx + 1_{[0,1/2]}(x)\,(u(t)+y(t))$$

$$\hat{y}(x,0) = \hat{y}_0(x)$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(1,t) = 0$$

$$u(t) = -\int_0^1 \hat{y}(x,t)\,dx.$$