Exercice

Considérons dans $L^2(0,1)$ le sysème de contrôle gouverné par l'équation de la chaleur

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 5\pi^2 y(x,t) + (\sin \pi x) u_1(t) + (\sin 2\pi x) u_2(t), \qquad 0 < x < 1, t > 0, \\
&y(x,0) = y_0(x), \qquad 0 < x < 1, \\
&y(1,t) = y(0,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad\qquad (1) \\
&z(t) = \pi \int_0^{1/2} y(x,t)\,dx
\end{aligned}
$$

1. Réecrire ce système sous la forme abstraite

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= Ay(t) + Bu(t), \\
y(0) &= y_0, \\
z(t) &= Cy(t)
\end{aligned}
$$

2. Identifier l'espace d'entrée U et l'espace de sortie Z.
3. Montrer que $B \in L(U, Y)$ et $C \in L(Y, Z)$.
4. Déterminer les valeurs propres de A et les fonctions propres correspondantes.
5. Montrer que A est un opérateur spectral de Riesz.
6. En déduire que A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y. Donner l'expression de ce semigroupe.
7. Etudier la contrôlabilité (exacte et approchée) du système (1).
8. Etudier l'observabilité (exacte et approchée) du système (1).

1.2. On définit les operateurs suivants

- $A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2} + 5\pi^2$$

$$D(A) = \left\{ f \in Y ;\ \frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2} \in Y,\ f(1) = f(0) = 0 \right\}$$

ici $Y = L^2(0,1)$

- $B : U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$

$$(f, g) \longrightarrow B(f, g)$$

où $B(f,g)(x) = (\sin \pi x) f + (\sin 2\pi x) g$

- $C : Y \longrightarrow Z = \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow Cf = \pi \int_0^{1/2} f(x)\, dx$$

Posons $y(t) = y(x,t)$, $y_0 = y(x,0)$; alors en termes de B et C on peut réécrire le système donné sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$z(t) = Cy(t)$$

3. Montrons que $B \in \mathcal{L}(U, Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$

C'est clair que B et C sont linéaires.

. Soit $(f,g) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|B(f,g)\|_Y^2 = \left|\int_0^1 \left((\sin \pi x) f + (\sin 2\pi x) g\right)^2 dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \left[\left((\sin \pi x) f\right)^2 + \left((\sin 2\pi x) g\right)^2 + 2(\sin \pi x)(\sin 2\pi x) fg\right] dx\right|$$

$$\leq 2\, \|(f,g)\|_U^2$$

Soit $f \in Y$, alors

$$|Cf| = \left|\pi \int_0^{1/2} f(x)\, dx\right|$$

$$\leq \pi \int_0^{1/2} |f(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \|f\|_Y$$ (en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

4. Soit λ une valeur de A et soit φ une fct propre correspondante, alors

$$A\varphi = \lambda\varphi \iff \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + 5\pi^2 \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

On trouve

$\lambda_n = -n^2\pi^2 + 5\pi^2$, $\varphi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$

5. Il est clair que A est un opérateur linéaire

Vu que $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$

donc $\overline{D(A)} = Y$.

1. Montrons que A est fermé. On commence par montrer que pour chaque $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ est bijectif. Soit $f \in Y$, alors

$$(\lambda I - A) y = f \iff \begin{cases} \lambda y - \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\pi^2 y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle

$$\lambda y - \left(\frac{d^2y}{dx^2} + 5\pi^2 y \right) = 0$$

est donnée par

$$y(x) = k_1 e^{-\sqrt{\lambda} x} + k_2 e^{\sqrt{\lambda} x} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dx$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}(t-x)} & \text{si } 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En imposant les conditions aux limites on obtient un système d'équations linéaires d'inconnus k_1 et k_2, qui admet une solution unique, ce qui prouve que $\lambda I - A$ est bijectif et par conséquent $y = (\lambda I - A)^{-1} f$

Maintenant multiplions les deux membres de l'équation $\lambda y - \left(\frac{d^2y}{dx^2} + 5\pi^2 y\right) = 0$ par y et intégrons de 0 à 1, on obtient

$$\int_0^1 \left[\lambda y^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2} + 5\pi^2 y \right) y \right] dx = \langle f, y \rangle$$

Ce qui implique

$$\lambda\|y\|_Y^2 + \left\|\frac{dy}{dx}\right\|_Y^2 - 5\pi^2\|y\|_Y^2 = \langle f, y\rangle$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(\lambda - 5\pi^2)\|y\|_Y^2 \leq \|f\|\,\|y\|$$

D'où

$$\|y\|_Y \leq \frac{1}{(\lambda - 5\pi^2)}\|f\|$$

avec $\lambda > 5\pi^2$

ou $$\|(\lambda I - A)^{-1} f\| \leq \frac{1}{(\lambda - 5\pi^2)}\|f\|$$

On déduit que $(\lambda I - A)^{-1}$ est ~~borné~~ et donc $\lambda I - A$ est fermé et par conséquent A est fermé.

Les fonctions propres de A forment une base orthonormée de Y, donc elles forment une base de Riesz. En plus on a

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = |((n+1)^2 - n^2)\pi^2|$$
$$= (2n+1)\pi^2 \longrightarrow +\infty \text{ qd } n \to +\infty$$

Donc l'ensemble $\overline{\{\lambda_n, n \geq 1\}}$ est totalement déconnecté.

On conclut alors que A est un opérateur spectral de Riesz.

6. On a $\sup_{n\geq 1} \lambda_n = -\pi^2 + 5\pi^2 = 4\pi^2 < +\infty$

Donc A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y donné par

$$S(t)f = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

7. Déterminer $S^*(t)$ l'adjoint de $S(t)$.

Soient $f, g \in Y$. On a d'une part

$$\langle S(t)f, g \rangle_Y = \langle f, S^*(t) g \rangle_Y$$

et d'autre part

$$\langle S(t)f, g \rangle_Y = \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \sum_{k=1}^{+\infty} \langle g, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_k \rangle \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle g, \varphi_n \rangle \langle f, \varphi_n \rangle$$

$$= \left\langle f, \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\rangle$$

Donc $S^*(t) g = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Par conséquent $S^*(t) = S(t)$

La paire (A,B) est approximativement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ si l'implication suivante est vraie

$$B^* S^*(t) y = 0 \text{ sur } [0,T] \Longrightarrow y = 0$$

Déterminons B^* l'adjoint de B.

Soient $f, g \in \mathbb{R}^2$ et $h \in Y$. On a d'une part

$$\langle B(f,g)^T, h \rangle_Y = \langle (f,g)^T, B^* h \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

et d'autre part

$$\langle B(f,g)^T, h \rangle_Y = \int_0^1 [(\sin \pi x) f + (\sin 2\pi x) g] h(x)\, dx$$

$$= f \int_0^1 (\sin \pi x) h(x)\, dx + g \int_0^1 (\sin 2\pi x) h(x)\, dx$$

$$= \left\langle (f,g)^T ; \left(\int_0^1 (\sin \pi x) h(x)\, dx , \int_0^1 (\sin 2\pi x) h(x)\, dx \right)^T \right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

D'où $\quad B^* h = \left(\int_0^1 (\sin \pi x) h(x)\, dx , \int_0^1 (\sin 2\pi x) h(x)\, dx \right)^T$

Alors

$$\| B^* S^*(t) y \|_U^2 = \| B^* S(t) y \|_{\mathbb{R}^2}^2$$

Mais $\quad B^* S(t) y = B^* \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n \right)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle B^* \varphi_n$$

et $\quad B^* \varphi_n = \left(\int_0^1 (\sin \pi x) \varphi_n(x)\, dx , \int_0^1 (\sin 2\pi x) \varphi_n(x)\, dx \right)^T$

Calculons $B^*\varphi_n$

Pour $n=1$

$$\int_0^1 (\sin \pi x)(\sin \pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Pour $n \neq 1$

$$\int_0^1 (\sin \pi x)(\sin n\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [\cos (n-1)\pi x - \cos (n+1)\pi x]\,dx$$

$$= 0$$

Pour $n=2$

$$\int_0^1 (\sin 2\pi x)(\sin 2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [1-\cos 4\pi x]\,dx = \frac{1}{2}$$

Pour $n \neq 2$

$$\int_0^1 (\sin 2\pi x)(\sin n\pi x)\,dx = 0$$

Donc $B^* S(t) y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\lambda_1 t} \langle y, \varphi_1 \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\lambda_2 t} \langle y, \varphi_2 \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{\lambda_1 t}\langle y, \varphi_1 \rangle, e^{\lambda_2 t}\langle y, \varphi_2 \rangle \right)^T$$

Remarquons pour $y = \varphi_n$, avec $n = 3, 4, \ldots$

$B^* S(t) y = 0$, et donc la paire (A, B) n'est pas approximativement contrôlable dans Y sur $[0, T]$ par conséquent elle n'est pas exactement contrôlable.

8. La paire (A,C) est approximativement observable dans Y sur $[0,T]$ si l'implication suivante est vraie.

$$CS(t)y = 0 \text{ sur } [0,T] \Rightarrow y = 0.$$

Déterminons $CS(t)y$

$$CS(t)y = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle C\varphi_n$$

$$C\varphi_n = \pi \int_0^{1/2} \varphi_n(x)\,dx = \pi\sqrt{2} \int_0^{1/2} \sin n\pi x \, dx$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{n\pi}\left[\cos n\pi x\right]_0^{1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{n}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{n} & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \text{ et } k = 2m \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{n} & \text{si } n = 2k \text{ et } k = 2m+1 \end{cases}$$

Remarquons que pour $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$,

$CS(t)\varphi_{4m} = 0$ et donc (A,C) n'est pas approximativement observable, par conséquent elle n'est pas exactement observable.