Exercice (Curtain & Zwart, Ex 8.10 (a,b)).

Soient $Y$ et $Z$ deux espaces de Hilbert.
Considérons dans $Y$ le système ~~entré~~ état-sortie décrit par

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ z(t) = Cy(t) \end{cases}$$

où :

- $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-sgpe $S(t)$ sur $Y$
- $C$ est un opérateur linéaire borné de $Y$ dans $Z$.

Supposons que la paire $(A,C)$ est détectable.

i. Montrer que si pour tout $y_0 \in Y$, la sortie $z(t)$ est un élément de $L^2([0,+\infty); Z)$, alors le semigroupe $S(t)$ est exponentiellement stable.

ii. Montrer que si l'équation de Lyapunov

$$A^*Py + PAy = -C^*Cy \quad , \quad y \in D(A)$$

a une solution nonnégative $P \in \mathcal{L}(Z)$, alors $S(t)$ est exponentiellement stable.

Solution

i. Puisque $(A,C)$ est détectable alors il existe $L \in \mathcal{L}(Z,Y)$ tq $A+LC$ engendre un $C_0$-sgpe $S_L(t)$ exp. stable.

Soit $S(t)$ le sgpe engendré par $A$.
On peut réécrire l'équation

$$y' = Ay$$

comme suit

$$y' = (A+LC)y - LCy$$

D'm

$$S(t)y_0 = S_L(t)y_0 - \int_0^t S_L(t-\tau)LCy(\tau)\,d\tau$$

$$= S_L(t)y_0 - \int_0^t S_L(t-\tau)Lz(\tau)\,d\tau$$

Vu que $z(\cdot) \in L^2([0,+\infty[;Z)$, il existe $M, \alpha > 0$

tq $\|z(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|z_0\|$ ou $z_0 = z(0)$, $t>0$

D'autre part, il existe $N, \omega > 0$ tq $t > 0$

$$\|S_L(t)\| \leq Ne^{-\omega t}$$

Alors

$$\|S(t)y_0\| \leq \|S_L(t)\|\|y_0\| + \int_0^t \|S_L(t-\tau)\|\|L\|\|z(\tau)\|\,d\tau$$

$$\leq Ne^{-\omega t}\|y_0\| + \int_0^t Ne^{-\omega(t-\tau)}\|L\|Me^{-\alpha\tau}\|z_0\|\,d\tau$$

$$\leq Ne^{-\omega t}\|y_0\| + N\|L\|Me^{-\omega t}\left|\int_0^t e^{(\omega-\alpha)\tau}\,d\tau\right|\|z_0\|$$

$$\leq Ne^{-\omega t}\|y_0\| + NM\|L\|e^{-\omega t}\left|\frac{1}{\omega-\alpha}\left(e^{(\omega-\alpha)t} - 1\right)\right|\|z_0\|$$

$$\leq Ne^{-\omega t}\|y_0\| + \frac{NM\|L\|}{|\omega-\alpha|}\left(e^{-\alpha t} + e^{-\omega t}\right)\|z_0\|$$

Ce qui implique le résultat désiré.

ii. Considérons la fonction

$$V(y(t)) = \langle y(t), Py(t) \rangle$$

Pour $y_0 \in D(A)$, on a

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = \langle y'(t), Py(t) \rangle + \langle y(t), Py'(t) \rangle$$

$$= \langle Ay(t), Py(t) \rangle + \langle y(t), PAy(t) \rangle$$

$$= \langle y(t), (A^*P + PA) y(t) \rangle = - \langle y(t), C^*Cy(t) \rangle$$

$$= - \| Cy(t) \|^2$$

Intégration de 0 à $t$ nous donne

$$\langle y(t), Py(t) \rangle - \langle y_0, Py_0 \rangle = - \int_0^t \| Cy(\tau) \|^2 d\tau$$

ou

$$\int_0^t \| Cy(\tau) \|^2 d\tau + \langle y(t), Py(t) \rangle = \langle y_0, Py_0 \rangle$$

Donc

$$\int_0^t \| Cy(\tau) \|^2 d\tau \leq \langle y_0, Py_0 \rangle$$

~~et par conséquent~~

Vu que $\overline{D(A)} = Y$, cette inégalité est vraie pour tout $y_0 \in Y$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \| Cy(\tau) \|^2 d\tau \leq \langle y_0, Py_0 \rangle < +\infty$$

c.a.d. $z(\cdot) = Cy(\cdot) \in L^2([0, +\infty[; Z)$

D'après i) $S(t)$ est exp. stable.

Exercice (Zabczyk, Théorème 3.3, page 227)

Soient $Y$ et $U$ deux espaces de Hilbert. Considérons dans $Y$, le système de contrôle décrit par

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

où $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $S(t)$ sur $Y$ et $B$ est un opérateur linéaire borné de $U$ dans $Y$.

On dit que la paire $(A,B)$ est exactement contrôlable dans $Y$ sur $[0,T]$ si pour tout $y_0 \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq $y(T)=0$ où $y(T)$ est la solution de (1) à l'instant $T$ correspondante à l'état initial $y_0$.

(i) Montrer que si la paire $(A,B)$ est exactement nul contrôlable dans $Y$ sur $[0,T]$, alors elle est exponentiellement stabilisable.

(ii) Montrer que la contrôlabilité approchée de la paire $(A,B)$ dans $Y$ sur $[0,T]$ ne garantit pas sa stabilisabilité exponentielle.

Solution

(i) Soit $u^*(\cdot)$ le contrôle transferrant l'état $y(\cdot)$ à $0$ au temps $T>0$, et pour $t>T$

$$u^*(t) = 0.$$

Si $y^*(\cdot)$ est l'état correspondant à $u^*$, alors

$$y^*(t) = 0 \text{ pour } t>T.$$

Alors

$$J(y^*(\cdot), u^*(\cdot)) = \int_0^{+\infty} \{\|y^*(t)\|^2 + |u^*(t)|^2\} dt < +\infty$$

D'après la théorie du régulateur quadratique linéaire, avec $Q = R = Id$, il existe un opérateur nonnégatif $P$ sur $Y$ tel que le contrôle

$$u(t) = Ky(t) = -B^* Py(t)$$

stabilise le système (1) exponentiellement.

(ii) Considérons le système de contrôle de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + hu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

dans un espace de Hilbert $Y$ avec une base orthonormée complète $(\varphi_n)$.

L'opérateur $A$ est linéaire et borné sur $Y$, donné par $Ay = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n$, $y \in Y$

où $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante ~~~~ qui converge vers 0.

$U = \mathbb{R}$ et $h \in Y$.

Soit $h \in Y$ tq $\langle h, \varphi_n \rangle \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, \varphi_n \rangle|^2}{|\lambda_n|} < +\infty$

Alors (2) est approximativement contrôlable.

Pour montrer que (2) n'est pas stabilisable.
Considérons un opérateur linéaire borné

$$K : Y \longrightarrow U = \mathbb{R}$$

de la forme

$$Ky = \langle k, y \rangle$$

où $k \in Y$.
Fixons $z \in Y$ et considérons l'équation linéaire

$$z = (A + BK)y \qquad (3)$$

Posons $\langle h, \varphi_n \rangle = \gamma_n$, $\langle y, \varphi_n \rangle = \xi_n$

$$\langle z, \varphi_n \rangle = \beta_n$$

Alors (3) est équivalente à un système infini d'équations

$$\lambda_n \xi_n + \gamma_n \langle k, y \rangle = \beta_n \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

d'où

$$\xi_n = \frac{\beta_n}{\lambda_n} - \frac{\gamma_n}{\lambda_n} \langle k, y \rangle \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\gamma_n}{\lambda_n} \right|^2 < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|^2 < +\infty$

alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\beta_n}{\lambda_n} \right|^2 < +\infty$$

donc $z$ ne peut pas être un élément arbitraire de $E$ et par conséquent $0 \in \sigma(A + BK)$.
Ceci implique que (2) n'est pas stabilisable.

References

[1]. Ruth Curtain & Hans Zwart,
Introduction to infinite-dimensional
Systems Theory, Springer 2020.

[2]. Jerzy Zabczyk, Mathematical Control Theory:
An Introduction, Birkhäuser 1992.