Exercice

Etudier la contrôlabilité exacte dans $Y = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ du système décrit par l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) & , 0<x<1, \ t>0 \\ y(x,0) = y_0(x) \ , \ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) & , \ 0<x<1 \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

où $u(\cdot,\cdot)$ est la fonction de contrôle.

Solution

L'espace d'état est $Y = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ et l'espace de contrôles est $U = L^2(0,1)$

Formulation abstraite

Introduisons l'opérateur

$$A : D(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

Posons $z(t) = \begin{pmatrix} y(x,t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \end{pmatrix}$

Alors on peut réécrire le système considéré sous la forme $\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{A} z(t) + Bu(t)$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$ (I identité de $H_0^1(0,1)$ ds $H_0^1(0,1)$)

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ Id \end{pmatrix}$$ (Id identité de $L^2(0,1)$ ds $L^2(0,1)$).

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1)$$

Il est claire que $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire borné de U dans Y.

$\mathcal{A}$ est linéaire et $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = Y$.

Déterminons l'adjoint de $\mathcal{A}$. Soient $(f,g)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $(h,k)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Alors

$$\langle \mathcal{A}(f,g)^T, (h,k)^T \rangle_Y = \langle (g, Af)^T, (h,k)^T \rangle_Y$$

$$= \langle g, h \rangle_{H_0^1(0,1)} + \langle Af, k \rangle_{L^2(0,1)}$$

$$= \langle g, h \rangle_{H_0^1(0,1)} + \int_0^1 \frac{d^2 f}{dx^2} \bar{k} \, dx$$

$$= \langle g, h \rangle_{H_0^1(0,1)} + \left[\frac{df}{dx} \bar{k} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{d\bar{k}}{dx} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dg}{dx} \frac{d\bar{h}}{dx} dx + \left[\frac{df}{dx}(1) \bar{k}(1) - \frac{df}{dx}(0) \bar{k}(0) \right] - \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{d\bar{k}}{dx} dx$$

$$= \left[g(1) \frac{d\bar{h}}{dx}(1) - g(0) \frac{d\bar{h}}{dx}(0) \right] - \int_0^1 g \frac{d^2 \bar{h}}{dx^2} dx +$$

$$\left[\frac{df}{dx}(1) \bar{k}(1) - \frac{df}{dx}(0) \bar{k}(0) \right] - \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{d\bar{k}}{dx} dx$$

$$= -\left[\frac{df}{dx}(1)\bar{k}(1) - \frac{df}{dx}(0)\bar{k}(0)\right] + \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_Y$$

Alors le choix logique de $D(A^*)$ est

$$D(A^*) = \{(h,k)^T \in Y, \ (k, Ah) \in Y\}$$

$$= H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$$

et donc $A^* = -A$ et d'après le théorème de Stone, A engendre un groupe unitaire.

Les valeurs propres de A sont $\{\lambda_n = in\pi, \ n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$

et les fonctions propres sont

$$\left\{ \Phi_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\begin{pmatrix} \sin n\pi x \\ \lambda_n \sin n\pi x \end{pmatrix} \right.$$

On montre que A est un opérateur spectral de Riesz et le semigroupe engendré par A est donné par

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t}\langle z, \Phi_n\rangle \Phi_n$$

(A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ si il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $z \in Y$ on a

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)z\|_U^2 \, dt \geq \gamma \|z\|_Y^2$$

Ici $B^* = [0 \ \ I]$ et $S^*(t) = S(-t)$ car

$$A^* = -A$$

Alors

$$B^* S^*(t) z = B^* S(t) z = B^*\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle z, \Phi_n\rangle \Phi_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle z, \Phi_n\rangle B^*\Phi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle z, \Phi_n\rangle \Psi_n$$

où $\Psi_n(x) = \sin n\pi x$

$$\|B^* S^*(t) z\|_U^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle z, \Phi_n\rangle|^2 = \|z\|_Y^2$$

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) z\|_U^2 \, dt = T \|z\|_Y^2$$

On prend $\gamma = T$ et la paire (A, B) est exactement contrôlable.