Chap I. Introduction à la théorie de bifurcation

1.1. Systèmes dynamiques

1.1.1. Def Un triplet $\{T, X, \varphi_t\}$ où T est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, X appelé espace d'état est un espace de Hilbert et

$$\varphi_t : X \longrightarrow X$$

est une famille d'opérateur d'évolution paramétrée par $t \in T$ satisfaisant les deux conditions suivantes:

(i) $\varphi_0 = id$ (identité de X dans X).

(ii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

Un système dynamique est dit continue (discret) si $T \subseteq \mathbb{R}$ ($T \subseteq \mathbb{Z}$).

1.1.2 Exemples

Exemple 1

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

où

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est une fonction continue par rapport à t et localement lipschitzienne par rapport à y. Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, l'équation admet une solution unique définie sur un voisinage ouvert J de 0 tq $y(0) = y_0$. Notons cette solution par $\varphi(t, y_0) = \varphi_t(y_0)$.

Le triplet $\{J, \mathbb{R}^n, \varphi_t\}$ est alors un système dynamique continue.

Exemple 2 Considérons le système décrit par

$$y_{n+1} = a\, y_n$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on a par induction

$$y_n = a^n y_0$$

Posons $y_n = \varphi_n(y_0)$; Alors $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}, \varphi_n\}$ est un système dynamique discret.

Exemple 3 Considérons dans un espace de Hilbert X l'équation différentielle abstraite

$$y'(t) = Ay(t)$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A)$, engendrant sur Y un C_0-semigroupe $S(t)$. Alors pour tout $y_0 \in Y$ l'équation admet une solution faible unique définie sur $\mathbb{R}_+$, donnée par $y(t) = S(t)y_0$ et donc le triplet $\{\mathbb{R}_+, X, S(t)\}$ est un système dynamique continue.

1.1.3. Def (orbite)

Une orbite partant de x_0 est l'ensemble

$$\{\varphi_t(x_0) ;\ t \in T\}$$

1.1.4. Def (Equilibre)

x_0 est un équilibre si $\varphi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in T$.

1.1.5. Def (Cycle)

Un cycle est une orbite L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi_{t+T_0}(x_0) = \varphi_t(x_0)$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in T$.

Dans le reste de ce chapitre, on va considérer les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles de la forme

$$y'(t) = f(y(t))$$

où f est une fonction de classe C^1 définie sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'origine $y = 0$ est un point d'équilibre pour ce système, c.a.d $f(0) = 0$.

1.1.6. ~~Stab~~ Def. (Stabilité)

Si pour tout voisinage U de l'origine suffisamment petit, il existe un voisinage V de l'origine tq $\varphi_t(y_0) \in U$ pour tout $y_0 \in V$, alors l'origine est dit stable.

1.1.7. Def (Stabilité asymptotique)

L'origine est dit asymptotiquement stable s'il existe un voisinage U_0 de l'origine tel que $\varphi_t(y_0) \longrightarrow 0$ pour tout $y_0 \in U_0$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

Durant le premier semestre, vous avez vu au cours d'E.D.O. deux approches pour étudier la stabilité d'un point d'équilibre pour un système dynamique décrit par une équation différentielle ordinaire dans $\mathbb{R}^n$, à savoir méthode de linéarisation et méthode directe de Lyapunov.

1.2. Bifurcations

Considérons sur $\mathbb{R}^n$, un système dynamique continu dépendant d'un paramètre réel μ.

$$y' = f(y,\mu) \qquad (S_\mu)$$

où la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1. Def Le système dynamique S_μ est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas pour une perturbation du paramètre μ.

1.2.2. Def Une valeur μ_0 pour laquelle le ~~système~~ portrait de phase du système S_μ change de façon qualitative est appelée valeur de bifurcation.

Nous allons présenter quelques bifurcations des systèmes planaires.

1.2.3. Bifurcation col-noeud

Considérons le système

$$\begin{cases} x' = \mu - x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

Trois cas peuvent être distingués selon les valeurs du paramètre μ :

(i). $\mu < 0$, il n'y a pas d'equilibre.

(ii). $\mu = 0$, l'origine $(0,0)$ est l'unique pt d'equilibre. Il n'est pas hyperbolique.

(iii) $\mu > 0$, il existe deux équilibres $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ et $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

A est un noeud stable et B est un col.

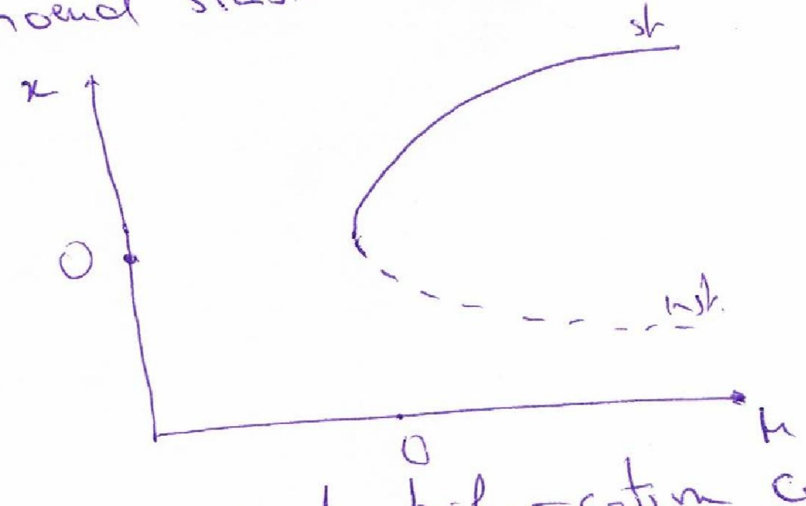


diagramme de bifurcation col-noeud.

$$x = \pm\sqrt{\mu}$$

$\mu = 0$ est la valeur de bifurcation.

1.2.4. Bifurcation transcritique

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

où μ est un paramètre réel.

On a trois cas selon les valeurs du paramètre μ

(i) $\mu < 0$, deux pts d'équilibre $O = (0,0)$ et $A = (\mu, 0)$. L'origine est un noeud stable et A est un col.

(ii) $\mu = 0$, un seul pt d'équilibre $O = (0,0)$. Il est instable.

(iii) $\mu > 0$, deux pts d'équilibre, l'origine $O = (0,0)$ qui est un col et $B = (\mu, 0)$ est un noeud stable.

$\mu = 0$ est la valeur de bifurcation

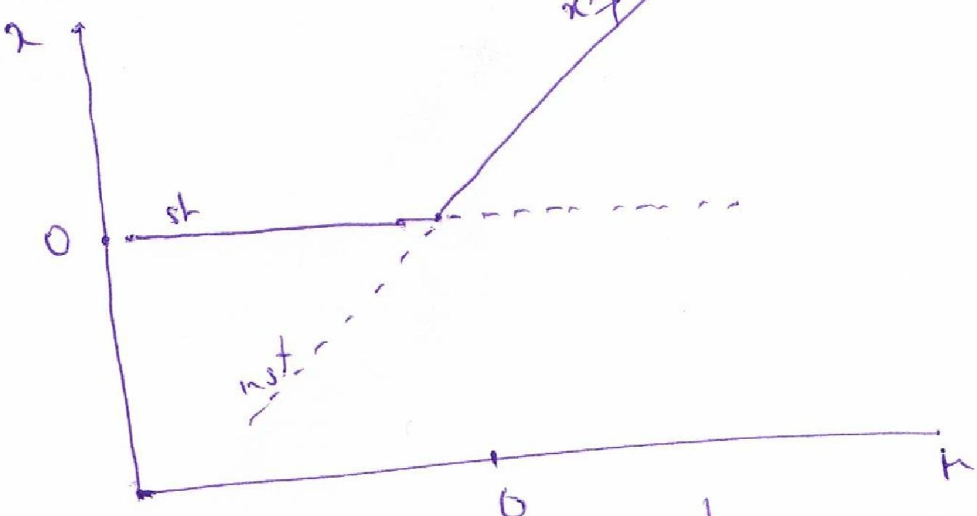


diagramme de bifurcation.

1.2.5. Bifurcation pitchfork

Considérons le système

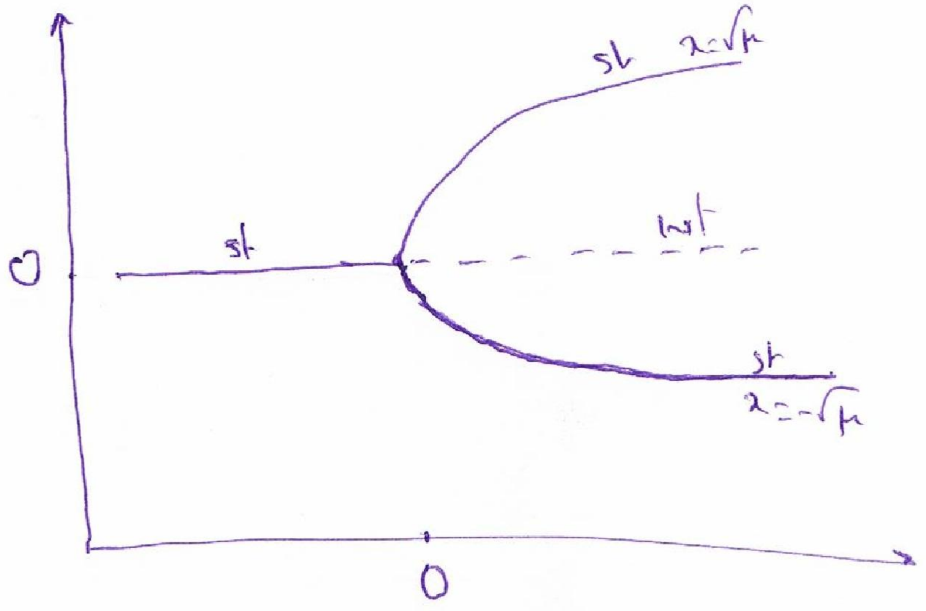
$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

On distingue les cas suivants:

(i) $\mu < 0$, l'origine $O = (0,0)$ est le seul pt d'équilibre. C'est un noeud stable.

(ii) $\mu = 0$, $O = (0,0)$ est le seul pt d'équilibre, et est ~~C'est un pt hyperbo~~ stable.

(iii) $\mu > 0$, trois pts d'equilibre l'origine $O = (0,0)$ et $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ et $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$. L'origine est un col et ~~l'origine~~ A et B sont des noeuds stables.
$\mu = 0$ est la valeur de bifurcation



1.2.6. Bifurcation de Hopf

Le système qu'on considère est décrit par

$$\begin{cases} x' = y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ce système admet un unique pt d'equilibre, l'origine (0,0) pour toute valeur de μ. Réecrivons ce système en termes de coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{cases} r' = r(\mu - r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

Trois ~~p~~ cas se présentent:

(i) $\mu < 0$; l'origine $r = 0$ (ou $O = (0,0)$) est le seul point d'equilibre. C'est un foyer stable.

(ii) $\mu = 0$, là aussi l'origine est le seul point d'equilibre et c'est un foyer stable

(iii) $\mu > 0$, deux pts d'équilibre $r = 0$ qui correspond à l'origine O, et $r = \sqrt{\mu}$ qui correspond à un cycle limite. L'origine est un foyer instable et le cycle limite est stable.

$\mu = 0$ est la valeur de bifurcation.

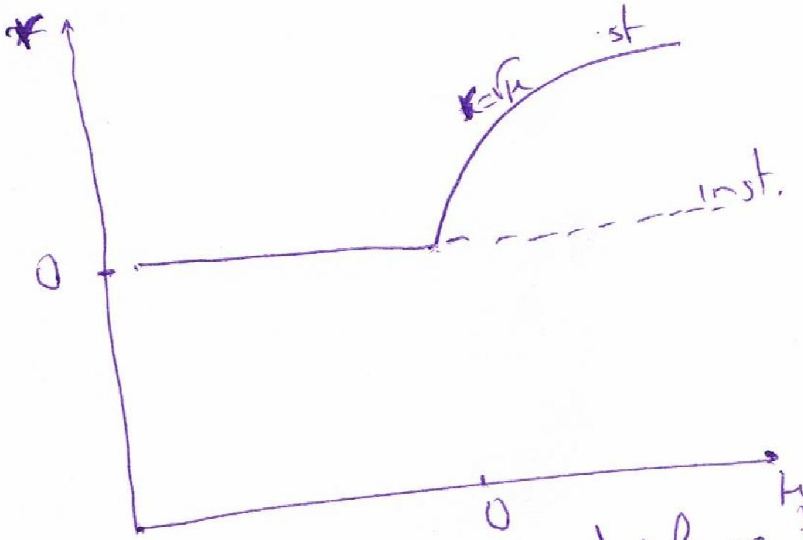


diagramme de bifurcation

1.2.7. Bifurcation verticale

Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} x' = \mu x + y \\ y' = -x + \mu y \end{cases}$$

Ce système admet l'origine $O = (0,0)$ comme point d'équilibre pour toute valeur de μ.

En termes de coordonnées polaires, ce système s'exprime comme suit:

$$\begin{cases} r' = \gamma r \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

On a trois cas possibles selon le signe du paramètre μ.

(i) $\mu < 0$, l'origine est un foyer stable

(ii) $\mu = 0$, alors $r(t) = r(0)$ et l'origine est un centre.

(iii) $\mu > 0$, l'origine est un foyer instable

$\mu = 0$ est la valeur de bifurcation.

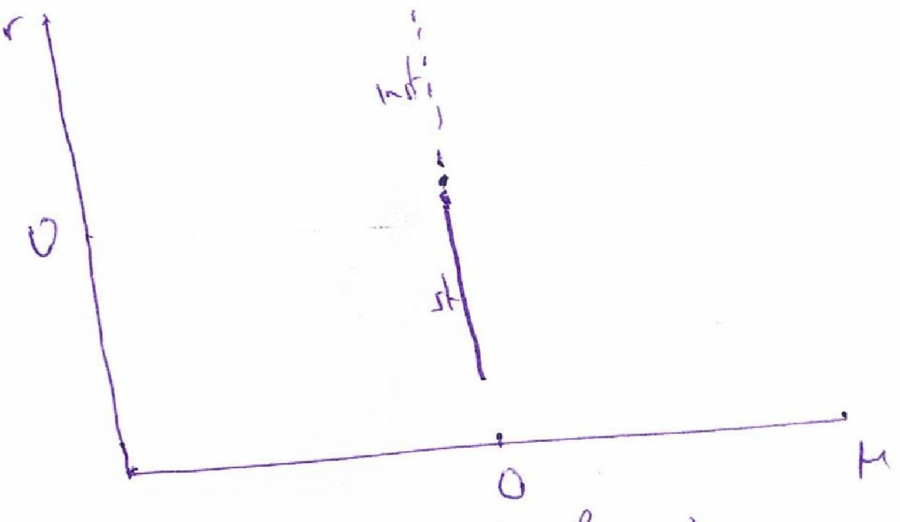


diagramme de bifurcation.