Chapitre II. Systèmes dynamiques discrets

Retirer le filigrane maintenant

2.1. Notions de base

Les systèmes dynamiques que nous considérons dans ce chapitre sont décrits par

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad (SD)$$

où f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système à l'instant k.

On a $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{k+1} = f(x_k)$, ... si $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi si $\circ$ représente la composition d'application

$$x_{k+1} = f(x_k) = f(f(x_{k-1})) = \dots = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{(k+1) \text{ fois}}(x_0)$$

pdfelement

2.1.1. Définitions

- Pour tout $x_0 \in \Omega$, on appelle orbite ou trajectoire, l'ensemble $\{f^k(x_0)\}_{k=0}^{+\infty}$
- Un sous-ensemble $D \subset \Omega$ est invariant par f si $f(D) \subset D$.
- Un pt $x^* \in \Omega$ est un équilibre pour (SD) si $f(x^*) = x^*$

2.1.2. Exemple

Soit l'équation logistique en temps discret

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k)$$

Les pts d'équilibre sont solutions de l'équation

$$x^* = \lambda x^* (1 - x^*)$$

donc $x^* = 0$ et $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda} > 0$ si $\lambda > 1$

2.1.3. Définition

Un pt d'équilibre x pour (SD) est dit hyperbolique si la matrice jacobienne $Df(x)$ n'a pas de valeur propre dont le module est égal à un.
Si les modules des valeurs propres de $Df(x)$ sont égaux à 1, x est pt d'équilibre elliptique.

2.1.4. Définition

Les notions de stabilité, attractivité et instabilité des pts d'équilibre se définissent comme le temps continu.

2.2. Méthode directe de Lyapunov

2.2.1. Théorème Si dans un voisinage B_0 de l'origine (supposons que $x^*=0$ est un équilibre) il existe une fonction scalaire continue V telle que:

i) V est définie positive dans B_0.

ii) $\dot{V}(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n)$ est semi-définie négative dans B_0,

alors l'équilibre $x^*=0$ est stable.
Si en plus $\dot{V}(x_n)$ est définie négative dans B_0, l'équilibre est asymptotiquement stable.

2.2.2. Déf Une fonction scalaire V qui vérifie les conditions (i) et (ii) est appelée fonction de Lyapunov.

Retirer le filigrane maintenant
pdfelement

2.2.3. Exemple

Considérons le système $x_{k+1} = x_k - x_k^3$

Prenons $V(x) = x^2$

Alors $\dot V(x_k) = x_{k+1}^2 - x_k^2$

$= (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k) = (x_k - x_k^3 - x_k)(x_k - x_k^3 + x_k)$

$= -x_k^3(2x_k - x_k^3) = x_k^4(x_k^2 - 2)$

< 0 pour $-\sqrt{2} < x_k < \sqrt{2}$

donc $x_0^* = 0$ est localement asymptotiquement stable

2.3. Méthode de linéarisation

2.3.1 Théorème

Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(x^*) = Df(x^*)$, où x^* est un pt d'équilibre pour (SD), sont à l'intérieur du disque unité, x^* est asymptotiquement stable. Si une de ces valeurs a un module plus grand que un, x^* est instable.

Si les valeurs propres λ de $J(x^*)$ sont tq $|\lambda| \leq 1$, l'équilibre x^* est dit indifférent. Les divers cas de stabilité sont alors possibles.

2.3.2. Exemples

Exemple 1

Considérons le système :

Retirer le filigrane maintenant

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{y_k}{2(1+x_k^2)} \\ y_{k+1} = \dfrac{x_k}{2(1+y_k^2)} \end{cases}$$

$(0,0)$ est un pt. d'équilibre

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2y_k x_k}{(1+x_k^2)^2} & \dfrac{1}{2(1+x_k^2)} \\ \dfrac{1}{2(1+y_k^2)} & -\dfrac{y_k x_k}{(1+x_k^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $J(0,0)$ sont $\pm \frac{1}{2}$, donc de module inférieur à 1.

$(0,0)$ est donc asymptotiquement stable.

pdfelement

Retirer le filigrane maintenant

__Exemple 2__

Considérons le système discret suivant

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n - \dfrac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n \qquad k > 0 \\ x_{n+1} = x_n + r_{n+1} \end{cases}$$

où r et x sont définis modulo 1.

Les pts. d'équilibre sont $r = 0$ et $x = 0, 1/2$

c.a.d $(0,0)$ et $(0,1/2)$

La matrice jacobienne aux pts d'équilibre

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(0,1/2) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$$

Les polynômes caractéristiques correspondants respectivement à $J(0,0)$ et $J(0,1/2)$ sont

$$p(0,0) = \lambda^2 - (2-k)\lambda + 1$$

et

$$p(0,1/2) = \lambda^2 - (2+k)\lambda + 1$$

Les racines de $p(0,1/2)$ sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{k+2 \pm \sqrt{k^2+4k}}{2}$

et on remarque que $|\lambda_1| > 1$

donc $(0,1/2)$ est instable

Le pt $(0,0)$ est stable si $0 < k < 4$.

2.4. Cycles

2.4.1. Def Un ensemble de pts $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p, ou encore p-cycle) si

$$f(x_k) = x_{k+1} \quad \text{pour } k = 0,1,2,\dots,p-2$$

$$\text{et } f(x_{p-1}) = x_0 = x_p$$

C'est à dire que chaque pt d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p : $f^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0,1,2,\dots,p-1$, et n'est pas un pt fixe pour f^k si $k < p$.

Retirer le filigrane maintenant

9.4.2. Exemples

Exemple 1 $x_{k+1} = -x_k$

$\{x_0, -x_0\}$ est un 2-cycle pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

Exemple 2 $x_{k+1} = x_k^2 - 1.75$

$x_0 = 0,5$

$x_1 = -1,50$; $x_2 = 0,5$.

Donc le système ~~a~~ un 2-cycle $\{0,5 ; -1,5\}$

9.4.3. Def

Un cycle d'ordre p est stable et attractif si chacun de ses pts est stable et attractif.

9.4.4. Exemple

Ex1 $x_{k+1} = x_k^2 - 1,75$

$\{0,5 ; -1,5\}$ est un cycle d'ordre 2

$f'(-1,5) = -3$

Donc le cycle n'est pas stable.

Ex2 Considérons dans $\mathbb{R}^3$, le système discret

$$x_{k+1} = A x_k$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\{x_0 = (1,0,0) ; x_1 = (-1,0,0)\}$ est un 2-cycle

la matrice A a une valeur propre de module > 1

donc le cycle est instable

Retirer le filigrane maintenant

pdfelement

9.4.5. Théorème (Cas unidimensionnel)

Considérons dans $\mathbb{R}$, le système discret

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

et supposons qu'il admet un p-cycle.
Alors $\{x_0, \dots, x_{p-1}\}$ sont des équilibres pour le système

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad (\Sigma)$$

où $g = f^p$

- Si $|f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{p-1})| < 1$, les p points $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ sont stables et attractifs pour Σ.
Donc le cycle est attractif.
- Si $|f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{p-1})| > 1$, les p points $x_0, \dots, x_{p-1}$ sont instables et répulsifs pour Σ, et donc le cycle est instable.
- Si $|f'(x_0) \dots f'(x_{p-1})| = 1$, on ne peut rien conclure.

9.4.6 Exemple

$$x_{k+1} = x_k^2 - 1{,}75$$

Le cycle d'ordre 2, est $\{0{,}5 ; -1{,}5\}$

$f'(0{,}5) = 1 \qquad f'(-1{,}5) = -3{,}5.$

$$|f'(0{,}5) f'(-1{,}5)| = 3{,}5 > 1$$

Le cycle est instable

Retirer le filigrane maintenant
pdfelement

2.5 Bifurcations

Il y a trois façons pour qu'un fixe x^* perde ou gagne son stabilité :

(i). lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(x^*)$ quitte (ou rentre dans) le disque unité $\bar{a}$ -1.

(ii), lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(x^*)$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité $\bar{a}$ $+1$

(iii). lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(x^*)$ quittent (ou rentrent dans) le disque unité simultanément $\bar{a}$ $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$

Dans le cas (i), on a une bifurcation flip (ou doublement de période, ou fourche).

Dans le cas (ii), on a une bifurcation noeud-col (ou tangente ou pli).

Dans le cas (iii), on a une bifurcation de Neimark-Sacker.

2.5.1 Exemples

Exple 1 Considérons ds $\mathbb{R}$, le système

$$x_{n+1} = x_n^2 + \cancel{x_n} + a, \quad a = \text{paramètre tq } |a| < 1$$

Les pts d'equilibres sont solutions de $x^2 + a = 0$

Si $a > 0$, il n'y a pas de pts d'equilibre

$a = 0$ un seul pt d'equilibre $x^* = 0$

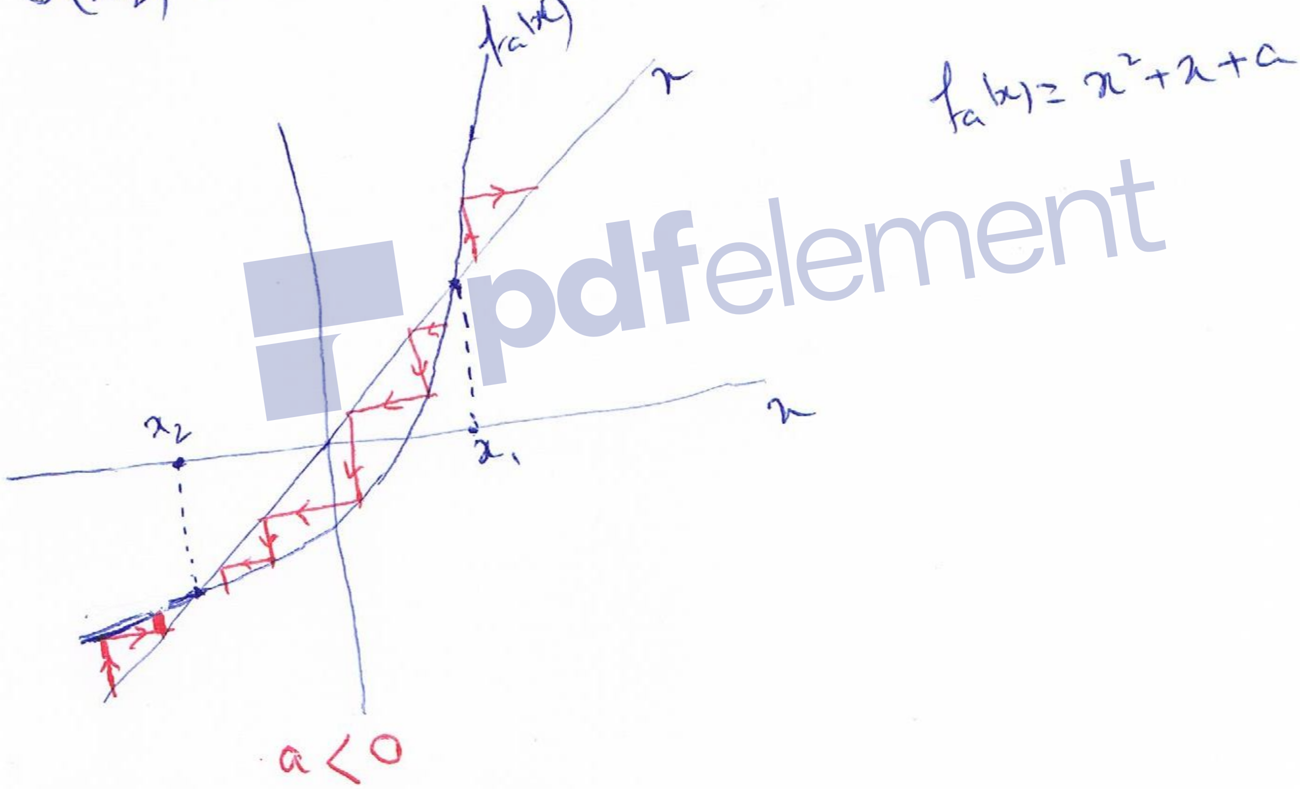
$a < 0$, il y a deux pts d'equilibre $x_1^* = \sqrt{-a}$

et $x_2^* = -\sqrt{-a}$

La matrice jacobienne est $J(x) = 1 + 2x$

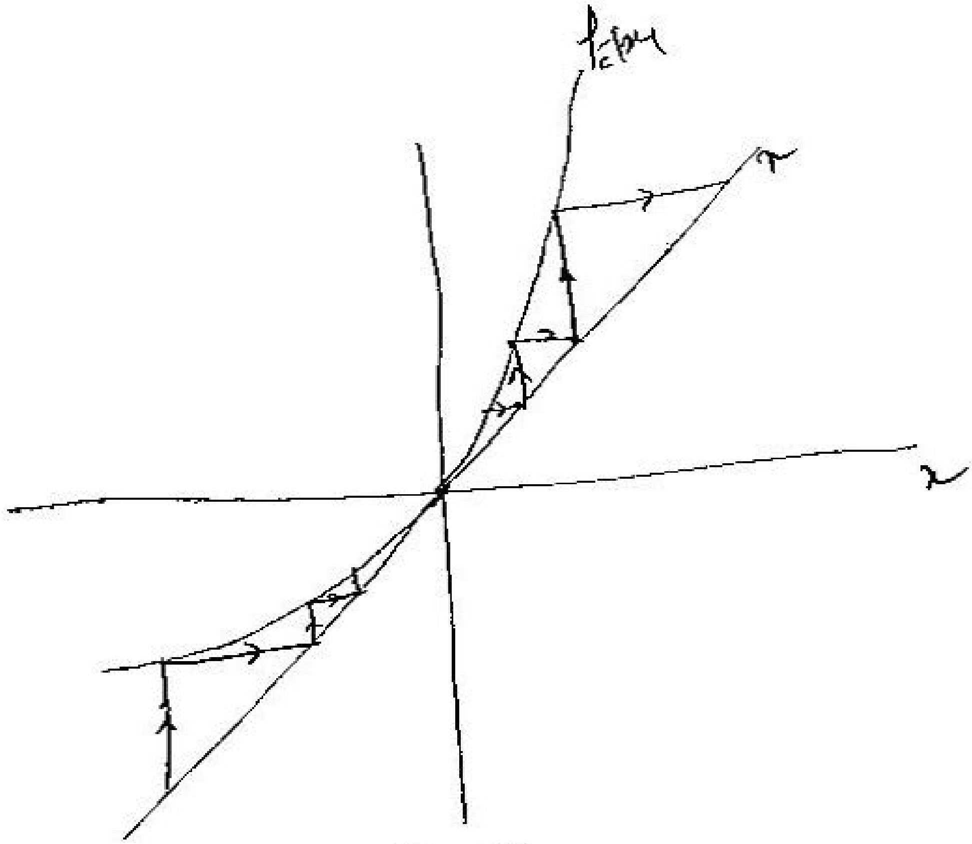
$J(x_1^*) = 1 + 2\sqrt{-a} > 1$, x_1^* est instable

$J(x_2^*) = 1 - 2\sqrt{-a} < 1$, x_2^* est stable

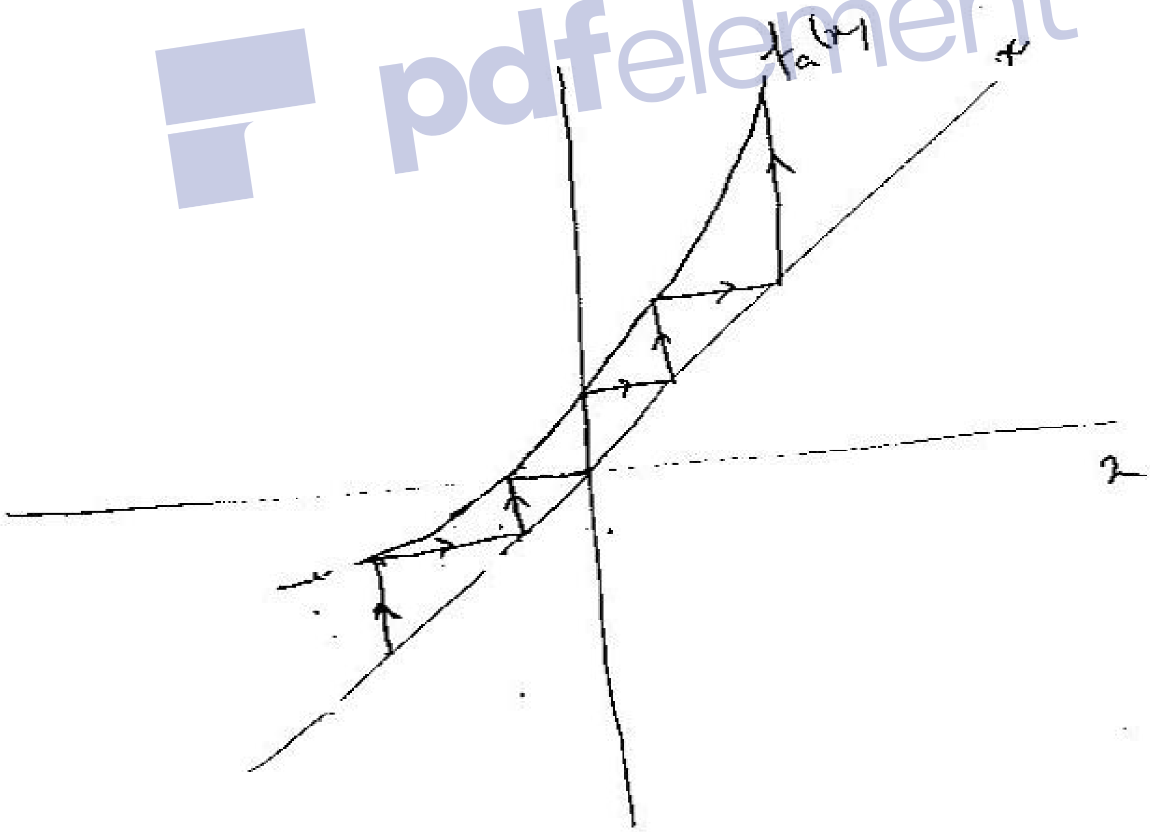


pdfelement

Retirer le filigrane maintenant

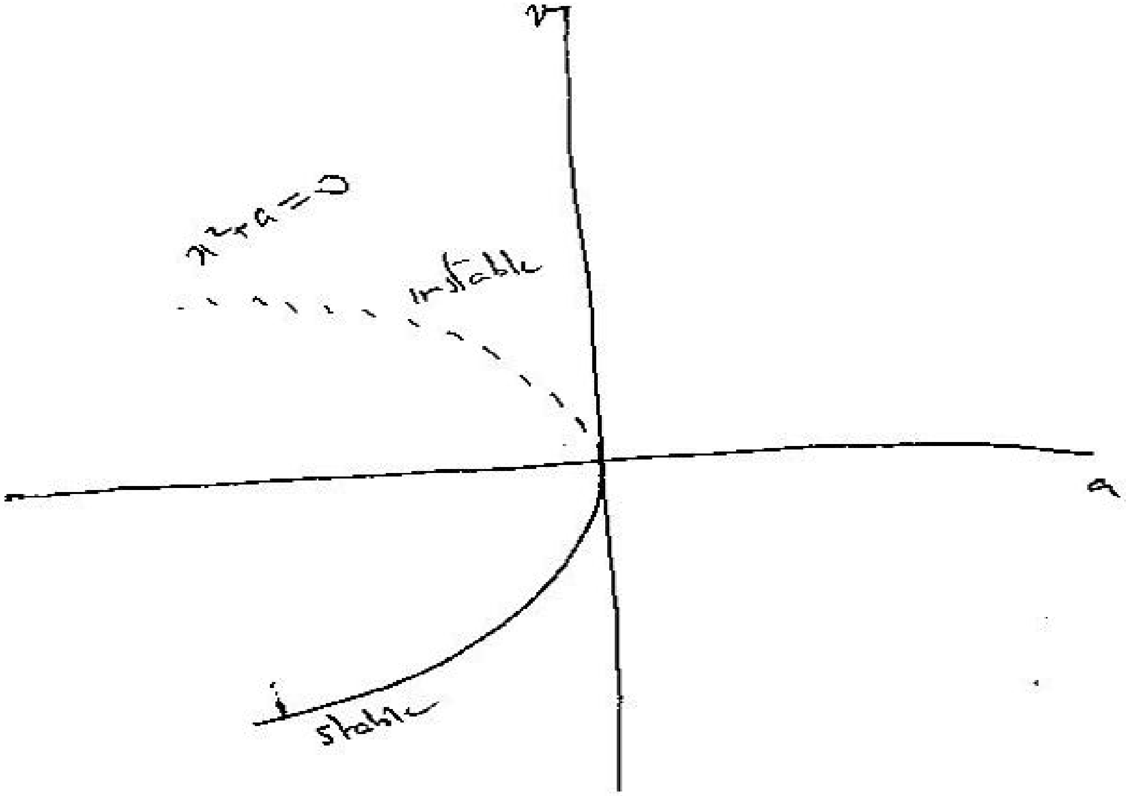


$a = 0$



$a > 0$

pdfelement
Retirer le filigrane maintenant



Retirer le filigrane maintenant

pdfelement

Exemple 2

Considérons dans $I = [0,1]$, le système dynamique discret décrit par la suite logistique $x_{n+1} = f(x_n)$

où $f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$

μ est un paramètre réel appartenant à $]0,4]$

$f'(x) = \mu(1 - 2x)$ et $f'(1/2) = 0$.

Alors le graphe de f est une parabole dont le sommet est $(1/2, \mu/4)$.

L'image de I par f est l'intervalle $[0, \mu/4]$

Points d'équilibre

Les pts d'equi. de f sont $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$

et $x_2^* \neq 0$ si $\mu \neq 1$

Stabilité des pts d'équilibre

- $f'(x_1^*) = \mu$. Donc x_1^* est un pt d'équilibre attractif si $\mu < 1$, répulsif pour $\mu > 1$, et indifférent pour $\mu = 1$.

- $f'(x_2^*) = 2 - \mu$. x_2^* est attractif pour $1 < \mu < 3$, répulsif pour $\mu > 3$ et $0 < \mu < 1$, indifférent pour $\mu = 1$ ou 3.

Donc pour $\mu > 3$, les deux pts d'équilibre sont répulsifs.

Retirer le filigrane maintenant

Cas $\mu = 1$

On a $x_1^* = x_2^* = 0$; donc un seul pt d'équilibre

et vu que $x_{n+1}^2 - x_n^2 = -x_n^3$

ce pt est instable

Cas $\mu = 3$ $\quad x_1^* = 0$, $x_2^* = 2/3$

$|f'(x_1^*)| = |\mu| = 3 > 1$, x_1^* est instable

$|f'(x_2^*)| = |2-\mu| = 1$; x_2^* est stable (Exercice).

Cas $\mu > 3$ **Apparitions de cycles d'ordre 2**

La recherche des cycles d'ordre 2 coïncide avec celle des pts d'équilibre du système

$$x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$$

Ceux-ci sont fournis par la résolution de l'équation $f_\mu^2(x) - x = 0$

Ces équilibres sont alors :

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$$

$$x_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}, \quad x_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$$

Ce sont des pts dans I.

C'est la première manifestation du phénomène de bifurcation. Pour $\mu < 3$, il n'y a pas de 2-cycle, alors qu'il y en a pour $\mu > 3$.

pdfelement

Remarquons que $\mu \xrightarrow{>} 3$, x_3^* et $x_4^* \to 2/3$

Attractivité des cycles d'ordre 2

Pour $\sigma = x_3^*$ ou x_4^*, on a

$$(f^2)'(\sigma) = -\mu^2 + 2\mu + 4$$

- $3 \leq \mu \leq 1+\sqrt{5} \simeq 3,236$

$$0 \leq (f^2)'(\sigma) \leq 1$$

et $(f^2)'(\sigma) < 1$ si $\mu > 3$

Donc le cycle d'ordre 2 est attractif

- $\mu = 1+\sqrt{5}$

$$(f^2)'(\sigma) = 0$$

Le cycle d'ordre 2 : $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}$ est attractif

- $\mu > 1+\sqrt{5}$

$$(f^2)'(\sigma) < 0$$

Si $\mu < 1+\sqrt{6} \simeq 3,449$, $(f^2)'(\sigma) > -1$

et le cycle d'ordre est attractif.

En résumé, on a mis en évidence une bifurcation équilibre stable vers équilibre instable et 2cycle stable.

Retirer le filigrane maintenant

Bifurcations de doublement de période

Pour $\mu > 1+\sqrt{6} = \mu_2$, f admet un cycle d'ordre 4 unique et ce cycle est attractif pour $\mu < \mu_3 \approx 3,544090$

Le cycle d'ordre 2 devient instable.

On a une bifurcation
equilibre instable + 2-cycle stable
vers equilibre instable + 2-cycle instable + 4-cycle stable

La zone des cycles attractifs d'ordre 2^n : $3 < \mu < \mu_\infty$

Le phénomène que nous venons de voir apparaître pour 2-cycles, et 4-cycles continue lorsque μ croit. On parle de cascades de doublement de période.

Ce phénomène a été mis en evidence par Feigenbaum vers 1978.

Théorème

On considère $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$

pour $0 \leq \mu \leq 4$

Soit μ_n la borne inferieure des μ tq f_μ admette un cycle d'ordre 2^n.

pdfelement

Retirer le filigrane maintenant

i) On a $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1+\sqrt{6}$,

$\mu_3 \simeq 3,54490$, $\mu_4 \simeq 3,564407$

ii) La suite (μ_n) est strictement croissante majorée par 4, elle converge vers un réel $\mu_\infty \simeq 3,5699456$ et la différence $\mu_\infty - \mu_n$ est équivalente qd $n \to +\infty$ à K/δ^n où K est une constante et $\delta \simeq 4,66921166091029906$

δ appelée constante de Feigenbaum.

iii) Pour $\mu_\infty > \mu > \mu_n$, f_μ admet un 2^n-cycle qui est attractif pour $\mu < \mu_{n+1}$ et répulsif pour $\mu > \mu_{n+1}$

iv) La dérivée $Df^n(x_0)$ en l'un des pts du cycle d'ordre 2^n décroît de 1 à -1 qd μ croît de μ_n à μ_{n+1}. En particulier il existe un unique nombre réel $\nu_n \in]\mu_n, \mu_{n+1}[$ tq le 2^n-cycle correspondant soit tq $Df^{2^n}_{\nu_n}(x_n^*) = 0$.

La suite $\nu_n \to \mu_\infty$ et on a $\mu_\infty - \nu_n \simeq K'/\delta^n$

pdfelement

Soit α_n le point de ce cycle le plus proche de $1/2$ et différent de $1/2$ et posons

$$d_n = \frac{1}{2} - \alpha_n$$

Alors, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$

avec $\alpha \simeq 2,502907875$

vi/ Pour $\mu < \mu_\infty$, f_μ n'a pas de cycle d'ordre p ou p n'est pas une puissance de 2.

<u>Le cas $\mu = 4$ et le chaos</u> <u>Definition du chaos</u>

Posons $I = [a,b]$

<u>Def</u> Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue.
La dynamique associée à f sera dite chaotique s'il existe $x_0 \in I$ tq la suite $x_{n+1} = f(x_n)$
associée à f et x_0 soit partout dense I.

<u>Def</u> Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue.
On dit que f est topologiquement transitive ou simplement transitive si étant donnés deux ouverts non vides U, V de I il existe un entier p tq $f^p(U) \cap V = \phi$

Prop Avec les notations précédentes, la dynamique est chaotique ssi f est transitive

Sensitivité et densité des pts périodiques

Def Soit $f : I \longrightarrow I$ une fct continue.
On dit que f est sensible aux conditions initiales s'il existe $\varepsilon > 0$ tq pour tout $x \in I$ et pour tout $\eta > 0$, il existe $y \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $|x - y| < \eta$ et $|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon$

Théorème Supposons que la dynamique ā f est chaotique. Alors :
i) L'ensemble des pts périodiques de f est partout dense dans I.
ii) f est sensible aux conditions initiales

Chaos et cycles

Proposition Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et $f : I \longrightarrow I$ une fct de classe C^1.
Si la dynamique de f est chaotique, alors elle n'admet pas de cycles attractifs.

Retirer le filigrane maintenant
pdfelement

Chaos et transitivité pour $\mu = 4$

Théorème Il existe $a \in I$, tq l'orbite de a par f_μ soit partout dense de I.
C'est à dire la dynamique de f_μ est chaotique sur I.

Proposition Soit $J =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.
Il existe $y \in J$ et un entier n tq

$$|f_\mu^n(x) - f_\mu^n(y)| > 1/2.$$

c'est la sensibilité aux conditions initiales.

Proposition Les pts périodiques de f_μ sont partout denses dans $[0,1]$.

Bibliographie

- Daniel Perrin, La suite logistique et le chaos,
- H. Dang-Vu & C. Delcarte, Bifurcation et chaos, ellipses, Paris, 2000.
- J.-L. Pac, Systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 2016
- Y.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New-York, 2004.

Retirer le filigrane maintenant
pdfelement