Chapitre 3. Systèmes dynamiques continus chaotiques

3.1. Rappels

Considérons dans $\mathbb{R}^n$, un système dynamique continu décrit par

$$y' = f(y) \qquad (Sc)$$

où $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

D est un ouvert et f est de classe C^1.

Notons par $y(t, y_0)$ la solution de (Sc) correspondante à la condition initiale $y(0) = y_0$.

3.1.1. Définition

On appelle flot de (Sc), l'application

$$\varphi_t : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$y_0 \longrightarrow \varphi_t(y_0) = y(t, y_0)$$

3.1.2. Définition Attracteur

Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. Soit A un ensemble invariant par φ_t.

On suppose que A est un ensemble invariant par φ_t.

c.a.d $\varphi_t(A) \subset A$.

On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tq si $y_0 \in V$ alors

$$\varphi_t(y_0) \in U \text{ pour tout } t.$$

Si de plus $\displaystyle\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$

et s'il existe une orbite dense dans A, alors A est un attracteur.

3.1.3. Exemples

Exemple 1 Un pt d'équilibre asymptotiquement stable est un attracteur.

Exemple 2

Soit le système dynamique décrit par

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

En termes de coordonnées polaires le système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

$(0,0)$ est un pt d'équilibre instable

$r = 1$ est un cycle limite stable. c'est un attracteur

3.2. Chaos et attracteurs étranges

3.2.1 Exemple Nous présentons dans cet exemple le premier attracteur étrange qui a été mis en évidence ; l'attracteur de Lorenz.

Considérons le système de Lorenz

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = -xz + rx - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

x, y et z représentent des grandeurs physiques qui modélisent le problème de la convection d'un fluide bidimensionnel soumis aux forces de gravité.

et à un gradient de température.

σ, b et r sont des paramètres réels.

On prend $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$

L'origin $(0,0,0)$ est un pt d'equilibre.

La matrice jacobienne en $(0,0,0)$ est

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{-(1+\sigma) - \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(1+\sigma) + \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2}, \quad \lambda_3 = -b$$

Si $0 < r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives; le pt d'equilibre $(0,0,0)$ est stable.

Pour $r > 1$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

L'origin est devenue instable, et deux nouveaux pts d'equilibre apparaissent (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)

où $x_1 = y_1 = -\sqrt{b(r-1)}$

$x_2 = y_2 = \sqrt{b(r-1)}$, $z_1 = r-1$

La matrice jacobienne correspondant à ces pts d'équilibre est

$$J(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\alpha \\ \beta & \alpha & -b \end{pmatrix}$$

où $\beta = \alpha = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $\gamma = r-1$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1)$$

On a les relations suivantes

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma+b+1)$$
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = b(\sigma+r)$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2\sigma b(r-1)$$

On montre que si $1 < r < r_1 = 1{,}34561$, les trois racines sont réelles et négatives.

Donc les deux pts d'équilibre (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont stables.

Si r est légèrement plus grand que r_1, il y a une racine réelle négative et deux racines complexes conjuguées.

Pour ce cas le polynôme caractéristique a la forme

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_r - i\lambda_i)(\lambda - \lambda_r + i\lambda_i)$$

et on a les relations suivantes entre λ_3, λ_r et λ_i

$$\lambda_3 + 2\lambda_r = -(\sigma+b+1)$$
$$\lambda_r^2 + \lambda_i^2 + 2\lambda_3\lambda_r = b(\sigma+r)$$
$$\lambda_3(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) = -2\sigma b(r-1)$$

Pour r proche de r_1 avec $r > r_1$, λ_r reste négative et les deux pts d'équilibre (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) restent stables.

Si r continue à croître, on obtient $\lambda_r = 0$ lorsque

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$$

c.à.d $r_c \simeq 24{,}7368$

Les valeurs propres sont alors

$$\lambda_1 = i\omega_0 \quad , \lambda_2 = -i\omega_0 \quad , \lambda_3 = -(\sigma+b+1)$$

avec $\omega_0^2 = b(r_c+\sigma) = \dfrac{2\sigma b(\sigma+1)}{\sigma-b-1}$

Pour $r > r_c$, λ_r est positive et donc les 2 pts d'équilibre (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deviennent instables et on obtient un attracteur étrange.

Cet attracteur présente deux ailes dont aucune n'est invariante par le flot: après un certain nombre de tours sur l'une, le flot emprunte l'autre pour une nouvelle ronde revient sur la première et ainsi de suite.

3.2.2 Propriétés d'un Attracteur étrange

Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont:

1) Dans l'espace des phases, l'attracteur étrange est de volume nul.
2) La dimension d de l'attracteur est fractale (non-entière) avec $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace des phases.
3) Sensibilité aux conditions initiales: deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre

3.2.3. Dimension de Hausdorff

Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Le diamètre de U est défini par

$$|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$$

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Considérons un recouvrement fini par des ensembles U_i de diamètre plus petit que ε, c.a.d $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $0 < |U_i| < \varepsilon$.

Soit

$$\mu_d(A, \varepsilon) = \inf_{|U_i| < \varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |U_i|^d \right)$$

La mesure de Hausdorff d-dimensionnelle est définie par

$$\mu_d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_d(A, \varepsilon)$$

Hausdorff a montré qu'il existe un réel d_H unique tq

$$\mu_d(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ \infty & \text{si } d < d_H \end{cases}$$

d_H est appelée la <u>dimension de Hausdorff</u> de A.

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est <u>fractal</u> si sa dimension de Hausdorff n'est pas entière.

<u>Exemple</u>

La dimension de l'attracteur de Lorenz est fractale. En effet pour $r = 28$, $d = 2{,}06$.

Bibliographie

[1] H. Dang-Vu et C. Delcarte, Bifurcations et chaos, Ellipses, Paris, 2000.

[2] J.L. Pac, Systèmes dynamiques, Dunod, Paris 2016.

—