Systèmes dynamiques chaotiques

Exercices

Exercice No. 1

Trouver les valeurs de bifurcation du système linéaire $x'(t) = A(\mu)x(t)$ avec $x = (x_1, x_2)^T$ et $A(\mu)$ est donnée par

(i) $A(\mu) = \begin{pmatrix} -2 & 1/4 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$

(ii) $A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & \mu - 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$

Solution

(i) Soient λ_1 et λ_2 les valeurs de $A(\mu)$. Posons $p = \lambda_1 + \lambda_2$ et $q = \lambda_1 . \lambda_2$. Alors

$p = tr\, A(\mu) = -2 + \mu$

$q = \det A(\mu) =$

Δ (discriminant du poly. carac.) $= (\mu + 3)(\mu + 1)$

μ	$-\infty$		-3		-1		$1/8$		2		$+\infty$
Δ		+	0	−	0			+		+	
q		+		+		+	0	−		−	
p		−		−		−		−	0	+	
pt. d'équ. (0,0)		noeud stable		foyer stable		foyer stable		col (instable)		col (instable)	

Alors $\mu = \frac{1}{8}$ est la valeur de bifurcation.

(ii) Pour ce cas on a $p = 2\mu$, $q = \mu^2 - \lambda + 1$ et
$\Delta = 4(\mu - 1)$

μ	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Δ	$-$	$-$	0	$+$
q	$+$	$+$		$+$
p	$-$	0	$+$	$+$
pt d'équilibre $(0,0)$	foyer stable	foyer instable		noeud instable

Alors $\mu = 0$ est la valeur de bifurcation. ■

Exercice No. 2

Montrer que le système

$$\begin{cases} x' = -\mu x - y + \dfrac{x}{1+x^2+y^2} \\ y' = x - \mu y + \dfrac{y}{1+x^2+y^2} \end{cases}$$

admet une bifurcation de Hopf.

Solution

Exprimons le système donné en termes de coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} r' = -r\left(\mu - \dfrac{1}{1+r^2}\right) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Les cas suivants se distinguent:

<u>(i) $\mu < 0$</u> $r = 0$ est le seul pt d'equilibre et puisque $r' > 0$, il est stable.

<u>(ii) $\mu = 0$</u> $r' = \frac{r}{1+r^2}$

$r = 0$ est le seul pt d'equilibre et il est instable.

<u>(iii) $0 < \mu < 1$</u> $r = 0$ pt d'equilibre

$r^2 = \frac{1-\mu}{\mu}$ cycle limite

L'origine est instable, par contre le cycle limite est stable.

<u>(iv) $\mu > 1$</u> $r = 0$ est le seul pt d'equilibre et il est stable.

Remarquons l'apparition d'un cyle limite quand μ passe des valeurs negatifs aux valeurs positives mais en restant inférieur à 1. Donc le système considéré admet une bifurcation de Hopf.