Exercice No. 3 (Ex. 10.2 de [2])

Retirer le filigrane maintenant

Soient f_1 et f_2 deux fcts de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = 2x+1$$
$$f_2(x) = -2x+4$$

On considère le système discret S_D décrit par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad n \geq 0$$

où $f(x_n) = \min(f_1(x_n), f_2(x_n))$

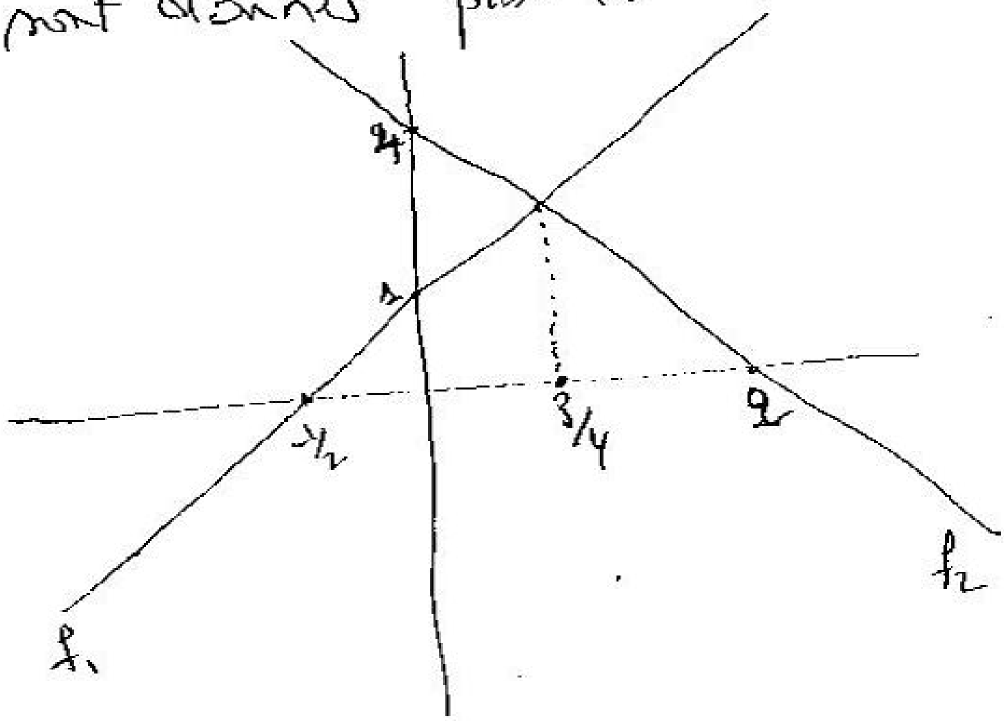
1. Déterminer les pts d'équilibre du système S_D.
2. Montrer que pour $x \in I = \left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{16}\right]$ on a $f^3(x) = 8x$ où $f^3 = f \circ f \circ f$
3. Déterminer les pts d'équilibre du système Σ défini par $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. $x_0 \in \mathbb{R}$
4. En déduire l'existence d'un 3-cycle pour S_D et étudier sa stabilité.

pdfelement

Solution

1. Les pts d'équilibre sont donnés par la relation

$$f(x) = x$$



Retirer le filigrane maintenant

Pour $x \in]-\infty, 3/4]$, $f_2(x) \geq f_1(x)$

et donc $f(x_n) = f_1(x_n)$

et les pts d'équilibre sont solutions de $f_1(x) = x$

c.a.d $2x+1 = x$, d'où $x = -1$.

Pour $x \in [3/4, +\infty[$, $f_1(x) \geq f_2(x)$

et les pts d'équilibre sont donnés par $f_2(x) = x$

c.a.d $-2x+4 = x$, d'où $x = 4/3$

Les pts d'équilibre sont alors $x = -1$ et $x = 4/3$

2- $[-1/8, 5/16] \subset]-\infty, 3/4[$, donc $f(x) = f_1(x) = 2x+1$

Pour $x \in [-1/8, 5/16]$, $2x+1 \in [3/4, 13/8] \subset [3/4, +\infty[$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x+1) = f_2(2x+1) = -4x+2$$

Pour $x \in [-1/8, 5/16]$, $-4x+2 \subset [3/4, +\infty[$

et $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(-4x+2) = f_2(-4x+2) = 8x$

pdfelement

3- Posons $f^3 = g$. Le pt d'équilibre pour Σ est donné par $g(x) = x$, c.a.d $8x = x$

et donc $x = 0$.

4- Le 3-cycle pour le système S_D est

$$\{-1, 0, 4/3\}$$

$f'(-1) = f_1'(-1) = 2$; $f'(4/3) = f_2'(4/3) = 2$

$f'(0) = f_1'(0) = 2$

$|f'(-1) \cdot f'(0)\, f'(4/3)| = 8 > 1$

Donc le 3-cycle est instable et répulsif.

Exercice No.4 (Ex 3.3 de [1])

On considère l'application itérée

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(y_n - y_n^3) \\ y_{n+1} = y_n - a(x_{n+1} - x_{n+1}^3), \end{cases} \qquad (S_D)$$

où a est un paramètre positif.

1. Ecrire l'application inverse T^{-1}
2. Calculer la matrice jacobienne de (S_D)
3. Montrer que si $0 < a < 2$, le pt d'equilibre $(0,0)$ est elliptique, si $a > 2$ il devient hyperbolique.
4. Montrer que l'application T^6 possède 6 pts fixes :

$e_0 = (t, 0)$, $e_1 = (t, -t)$, $e_2 = (0, -t)$, $e_3 = (-t, 0)$

$e_4 = (-t, t)$ $e_5 = (0, t)$, $t > 0$

pour certaine valeur de t que l'on calculera.

Solution

1. On a

$$x = \alpha + a(\beta - \beta^3)$$
$$y = \beta - a(x - x^3)$$

c.a.d $(x, y) = T(\alpha, \beta)$

D'où

$$\begin{cases} \beta = y + a(x - x^3) \\ \alpha = x - a(\beta - \beta^3) \end{cases}$$

pdfelement
Retirer le filigrane maintenant

- La matrice jacobienne de T est

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & a(1-3y^2) \\ -a(1-3x_i^2) & 1-a^2(1-3x_i^2)(1-3y^2) \end{pmatrix}$$

3- On a $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1-a^2 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de $J(0,0)$ sont

$$\lambda_1 = \frac{2-a^2-a\sqrt{a^2-4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2-a^2+a\sqrt{a^2-4}}{2}$$

et on vérifie que pour $0<a<2$, l'origine est elliptique, c.a.d $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$, et pour $a>2$, $(0,0)$ est hyperbolique, c.a.d $|\lambda_1|,|\lambda_2|\neq 1$

4. Trouvons des valeurs de t pour lesquelles l'ensemble des pts $\{e_0, e_1, \dots, e_5\}$ est un cycle d'ordre 6 pour S_p ssi

$\{e_0,\dots,e_5\}$ est un cycle d'ordre 6 pour S_p si $T(e_i) = e_{i+1}$ pour $i=0,\dots,4$, $T(e_5)=e_0$

D'où pour $i=0$, $T(e_0) = (t, -a(t-t^3))$

et $T(e_0) = e_1$. Donc

$$-t = -a(t-t^3)$$

ou $t = \sqrt{\frac{a-1}{a}}$

Pour que t existe il faut que $a>1$

pdfelement

Retirer le filigrane maintenant

et on vérifie que sous la condition

$$t = \sqrt{\frac{a-1}{a}}$$

on a

$$T(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, 4$$

et

$$T(e_5) = e_0.$$

Donc T^6 possède 6 pts fixes. $e_0, \dots, e_5$.

<u>Exercice No. 5</u> (Ex 3.4 de [13]).

On considère le système discret décrit par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos a - (y_n - x_n^2) \sin a \\ y_{n+1} = x_n \sin a + (y_n - x_n^2) \cos a \end{cases}$$

avec $0 < a < \pi$.

1. Calculer T^{-1}. où $(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n)$
2. Trouver les pts fixes de T et étudier leur stabilité.

<u>Solution</u>

1. L'inverse de T est

$$x_n = x_{n+1} \cos a + y_{n+1} \sin a$$

$$y_n = -x_{n+1} \sin a + y_{n+1} \cos a + (x_{n+1} \cos a + y_{n+1} \sin a)^2$$

2 Les pts fixes de T sont donnés par

$$T(x,y) = (x,y)$$

c.a.d

$$x = x \cos a - (y - x^2) \sin a$$

$$y = x \sin a + (y - x^2) \cos a$$

Retirer le filigrane maintenant
pdfelement

On trouve deux pts d'equilibre
$M = (0,0)$ et $N = \left(2\,tg\,\frac{a}{2},\ 2\,tg^2(a/2)\right)$

La matrice jacobienne du système donné est

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \cos a + 2x\sin a & -\sin a \\ \sin a - 2x\cos a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = e^{ia}$ et $\lambda_2 = e^{-ia}$

M est alors un pt d'equilibre elliptique.

Pour le pt d'equilibre N, on a

$$J(N) = \begin{pmatrix} \cos a + 2(tg\,\frac{a}{2})\sin a & -\sin a \\ \sin a - 2(tg\,\frac{a}{2})\cos a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\det J(N) = \cos^2 a + 2\left(tg\,\frac{a}{2}\right)\sin a\cos a + \sin^2 a - 2\left(tg\,\frac{a}{2}\right)\cos a\sin a$$
$$= 1$$

$$tr\,J(N) = 2\cos a + 2\left(tg\,\frac{a}{2}\right)\sin a = 2 + 4\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

et $\left(tr\,J(N)\right)^2 - 4\det J(N) = 4 + 16\sin^4\left(\frac{a}{2}\right) + 8\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) - 4 > 0$

Donc les val. propres sont réelles et positives

et vu que $tr\,J(N) > 2$, le pt d'equilibre N est hyperbolique et instable.

Retirer le filigrane maintenant

pdfelement

Retirer le filigrane maintenant

Pour étudier la stabilité du pt d'équilibre $(0,0)$, on considère la fonction

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

V est définie positive.

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(x_n, y_n) = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - x_n^2 - y_n^2$$

Mais

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 \cos^2 a + (y_n - x_n^2)^2 \sin^2 a + x_n^2 \sin^2 a + (y_n - x_n^2)^2 \cos^2 a = x_n^2 + (y_n - x_n^2)^2$$

Donc

$$\begin{aligned} V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(x_n, y_n) &= (y_n - x_n^2)^2 - y_n^2 \\ &= x_n^4 - 2x_n^2 y_n \\ &= x_n^2(x_n^2 - 2y_n) \\ &\leq x_n^2(x_n^2 + y_n^2 - 2y_n) \\ &\leq x_n^2(x_n^2 + (y_n - 1)^2 - 1) \end{aligned}$$

Alors pour $x_n^2 + (y_n - 1)^2 < 1$,

$V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(x_n, y_n) < 0$, et l'origine $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

—

pdfelement

Bibliographie

[1]. H. Dang-Vu & C. Delcarte, Bifurcations et chaos, Ellipses, Paris, 2000.

[2]. J.-L. Pac, Systèmes Dynamiques, Dunod, Paris, 2016.