Université Batna 2

Systèmes linéaires de dimension infinie
Devoir à la maison

Exercice No. 1.
Soient Y et Z deux espaces de Hilbert réels. Considérons le système décrit par

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \\ z(t) = Cy(t). \end{cases} \tag{1}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y et C est un opérateur linéaire borné de Y dans Z.
Montrer que le système (1) est exactement observable si et seulement s'il existe un opérateur borné L qui est positive, inversible dont l'inverse est borné et satisfait l'équation de Lyapunov

$$< Ay_1, Ly_2 >_Y + < Ly_1, Ay_2 >_Y = < Cy_1, Cy_2 >_Y, \quad \text{for all } y_1, y_2 \in D(A)$$

$< .,. >$ désigne le produit scalaire dans Y.

Exercice No. 2.
(i). Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème aux limites suivant

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0,$$
$$\frac{df}{dx}(0) = f(1) = 0.$$

(ii). Posons $Y = L^2(0,1)$, et considérons l'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} Af &= \frac{d^2 f}{dx^2}, \\ D(A) &= \{f \in Y, f \text{ et } \frac{df}{dx} \text{ sont absolument continues, } \frac{d^2 f}{dx^2} \in Y, \frac{df}{dx}(0) = f(1) = 0\} \end{aligned}$$

Montrer que A est un opérateur spectral de Riesz.
(iii). Etudier dans Y la contrôlabilité exacte et approchée du système suivant

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + (\sin x)u(t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ &y(x,0) = y_0(x), \quad 0 < x < 1, \\ &\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = y(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$