SYSTEMES LINEAIRES BIEN POSES

Table des matières

Introduction

Une généralisation des systèmes linéaires de dimension finie est la classe des systèmes linéaires bien posés. Cette classe a été introduite par Salamon [4] pour formuler et résoudre d'une façon unifiée des problèmes de contrôle pour les systèmes décrits par des equations aux dérivées partielles ou par des equations différentielles fonctionnelles.
Brièvement parlant, un système linéaire bien posé est un système linéaire à temps invariant tel que sur n'importe quel intervalle fini l'opérateur reliant l'etat initial et la fonction de contrôle à l'etat final et la fonction de sortie est bornée. Ceci implique qu'un système linéaire bien posé a une fonction de transfert $G(s)$ bien définie.
Une importante sous classe des systèmes linéaires bien posés est formée par les systèmes réguliers (Tucsnak et Weiss [8]). Un système régulier est un système linéaire bien posé satisfaisant la condition $\lim_{s\in\mathbb{R},s\to+\infty} G(s)$ existe.
Notre but dans ce mémoire est de présenter une étude détaillée des systèmes linéaires bien posés. On procède comme suit :
Dans le premier chapitre, on définit quelques concepts pour les systèmes de dimension finie tels que : equations décrivant le système, linéarité, système à impédance passive et systèmes à diffusion passive.
Le deuxième chapitre est dévoué à la description des systèmes linéaires bien posés. On commence par introduire le concept d'admissibilité pour les opérateurs de contrôle et d'observabilité. Ensuite, on définit les systèmes linéaires bien posés et les systèmes réguliers. Enfin, on illustre ces concepts de "bien posé" et de régularité par deux exemples.
Dans le dernier chapitre on présente une large classe de système linéaire à temps invariant appelée système nœud.

Chapitre 1

Systèmes linéaires de dimension finie

1.1 Représentation des systèmes linéaires

Il y'a deux approches pour représenter les systèmes de contrôles linéaires continues de dimension finie : l'approche temporelle et l'approche fréquentielle.

1.1.1 Approche temporelle

Dans cette approche on décrit le système par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

où :

- $x(.) \in X = \mathbb{R}^n$ représente l'etat de système.
- $u(.) \in U = \mathbb{R}^m (m \leq n)$ est la fonction de contrôle .
- $y(.) \in Y = \mathbb{R}^P (p \leq n)$ est la fonction de sortie.
- X, U, Y sont appelés respèctivement espace d'etat, espace de contrôle et espace de sortie.
- A, B, C, D sont des matrices de dimension appropriée : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, et $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ avec n, m et $p \in \mathbb{N}$.

On note (1.1) par (Σ).

1.1.2 Approche fréquentielle

Les systèmes de contrôles linéaires peuvent aussi être décrits par

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

$\mathbf{G}(.)$ est la fonction de transfert.

1.2 Relation entre les deux approches

En appliquant la transformation de Laplace sur le système Σ et en prenant $x(0) = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} \widehat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\widehat{u}(s) \\ \widehat{y}(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)\widehat{u}(s) \end{cases}$$

où $\widehat{.}$ représente la transformée de Laplace de $\textbf{.}$.
On a

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$\mathbf{G}(s)$ est une fonction analytique à valeur dans $\mathcal{L}(U, Y)$ définie pour $s \in \rho(A)$. L'opération inverse est investie par la théorie de la realisation.

1.3 Propriétés du système (Σ)

Supposons que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, U)$ et $y \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, Y)$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\mathbf{P}_J$ l'opérateur de troncature défini par :

$$\mathbf{P}_J v(t) = \begin{cases} v(t) & pour \quad t \in J \\ 0 & pour \quad t \notin J \end{cases}$$

Si l'état initial $x(\tau)$ et la réstriction de $u(.)$ sur $[\tau, t]$ sont donnés, alors

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]}y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A(t-\tau)} & \int_\tau^t e^{A(t-s)}B\mathbf{.}ds \\ Ce^{A(t-\tau)} & D\mathbf{.} + C\int_\tau^t e^{A(t-s)}B\mathbf{.}ds \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]}u \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Notons

$$\Sigma(\tau, t) = \begin{pmatrix} e^{A(t-\tau)} & \int_\tau^t e^{A(t-s)}B\mathbf{.}ds \\ Ce^{A(t-\tau)} & D\mathbf{.} + C\int_\tau^t e^{A(t-s)}B\mathbf{.}ds \end{pmatrix}$$

Donc $\Sigma(\tau, t)$ est un opérateur linéaire borné définie de $X \times L^2([\tau, t], U)$ dans $X \times L^2([\tau, t], Y)$.
Le système (Σ) est appelé :

- Linéaire parceque les opérateurs $\Sigma(\tau, t)$ sont linéaires.
- Bien posé parceque les opérateurs $\Sigma(\tau, t)$ sont bornés.
- À temps invariant parceque les opérateurs $\Sigma(\tau, t)$ ont la propriété suivante :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ S_{-\tau}\mathbf{P}_{[\tau,t]}y \end{bmatrix} = \Sigma(0, t - \tau) \begin{bmatrix} x(\tau) \\ S_{-\tau}\mathbf{P}_{[\tau,t]}u \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

On note par S_h le shift bilatéral droit par h (òu $h \in \mathbb{R}$) sur $L^1_{loc}(\mathbb{R}, V)$ pour tout espace de Banach V. Ainsi,

$$S_h u(t) = \begin{cases} u(t - h) & si \quad h > 0 \\ u(t - |h|) & si \quad h < 0 \end{cases}$$

(1.3) et (1.2) montrent que $\Sigma(\tau, t)$ ne dépend que de la différence de temps $t-\tau$. A cause de ses propriétés (Σ) devrait être appelé aussi système linéaire bien posé de dimension finie à temps invariant(LTI).

1.4 Système à impédance passive

Définition 1.4.1. *Supposons que $U = Y$ et X sont des espaces de dimension finie muni d'un produit scalaire. Le système $(\sum)$ est appelé à impédance passive si le long des solutions de (1.1) ,*

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq 2Re\langle u(t), y(t)\rangle \tag{1.4}$$

Théorème 1.4.2. *Le système $(\sum)$ est à impédance passive si est seulement si la matrice*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}$$

est dissipatif c'est á dire $T + T^* \leq 0$.

Preuve. Soient $x_0 \in X$ et $u_0 \in U$.
On a :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

Alors

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^* & -C^* \\ B^* & -D^* \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A + A^* & B - C^* \\ -C + B^* & -D - D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (A + A^*)x_0 & (B - C^*)u_0 \\ (-C + B^*)x_0 & (-D - D^*)u_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle x_0, (A + A^*)x_0\rangle + \langle x_0, (B - C^*)u_0\rangle + \langle u_0, (-C + B^*)x_0\rangle + \langle u_0, -(D + D^*)u_0\rangle$$

$$= \langle x_0, Ax_0\rangle + \langle x_0, A^*x_0\rangle + \langle x_0, Bu_0\rangle - \langle x_0, C^*u_0\rangle - \langle u_0, Cx_0\rangle + \langle u_0, B^*x_0\rangle -$$

$$\langle u_0, Du_0\rangle - \langle u_0, D^*u_0\rangle$$

$$= 2Re\langle x_0, Ax_0\rangle + 2Re\langle x_0, Bu_0\rangle - 2Re\langle Cx_0, u_0\rangle - 2Re\langle Du_0, u_0\rangle$$

$= 2Re\langle x_0, Ax_0 + Bu_0\rangle - 2Re\langle Cx_0 + Du_0, u_0\rangle .$

Maintenant

$$
\begin{aligned}
T + T^* \text{ est dissipatif} &\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, (T+T^*)\begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow 2Re\langle x_0, Ax_0 + Bu_0\rangle - 2Re\langle Cx_0 + Du_0, u_0\rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow 2Re\langle x_0, Ax_0 + Bu_0\rangle \leq 2Re\langle Cx_0 + Du_0, u_0\rangle \\
&\Leftrightarrow (\textstyle\sum) \text{ est à impédance passive.}
\end{aligned}
$$
□

Proposition 1.4.3. *Si (Σ) est à impédance passive alors A est dissipative.*

Preuve. Soient $x_0 \in X$ et $u_0 \in U$

(Σ) est à impédance passive alors

$$2Re\langle x_0, Ax_0 + Bu_0\rangle \leq 2Re\langle Cx_0 + Du_0, u_0\rangle$$

Pour $u_0 = 0$ on obtient :

$$2Re\langle x_0, Ax_0\rangle \leq 0$$

alors A est dissipative. □

Proposition 1.4.4. *Si $\boldsymbol{G}$ est la fonction de transfert d'un système à impédance passive alors $\boldsymbol{G}$ est positive ce qui signifie que*

$$\boldsymbol{G}(s) + \boldsymbol{G}^*(s) \geq 0 \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad s \in \mathbb{C}_0, \tag{1.5}$$

avec
$\mathbb{C}_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \qquad Res \geq \alpha\}$

Preuve. Soient $x \in X$ et $u \in U$.
Puisque le système est à impédance passive, alors

$$Re\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0$$

Donc

$$Re\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0$$

En particulier pour $x = (sI - A)^{-1}Bu$ avec $Re \geq 0$, on obtient :

$$Re\left\langle \begin{pmatrix} (sI-A)^{-1}Bu \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (sI-A)^{-1}Bu \\ u \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$=Re\left\langle \begin{pmatrix} (sI-A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}u, \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (sI-A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}u \right\rangle$$

$= Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, (-A(sI-A)^{-1}B - B)u\right\rangle + Re\left\langle u, (C(sI-A)^{-1}B + D)u\right\rangle$

$= Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, (-A(sI-A)^{-1}B - B)u\right\rangle + Re\left\langle u, \mathbf{G}(s)u\right\rangle \geq 0.$

$= Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, -A(sI-A)^{-1}Bu\right\rangle + Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, -Bu\right\rangle$

$+ Re\left\langle u, \mathbf{G}(s)u\right\rangle \geq 0.$

Alors :

$Re\left\langle u, \mathbf{G}(s)u\right\rangle \geq Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, A(sI-A)^{-1}Bu\right\rangle + Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, Bu\right\rangle.$

On a :

$$A(sI-A)^{-1} = -(sI-A-sI)(sI-A)^{-1} = -I + s(sI-A)^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} Re\left\langle u, \mathbf{G}(s)u\right\rangle &\geq Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, (-I + s(sI-A)^{-1})Bu\right\rangle + Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, Bu\right\rangle \\ &\geq Re\left\langle (sI-A)^{-1}Bu, s(sI-A)^{-1}Bu\right\rangle \\ &\geq Re(s)\left\|(sI-A)^{-1}B\right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$2Re\left\langle u, \mathbf{G}(s)u\right\rangle \geq 0$$

D'où

$$\langle u, (G(s) + G(s)^*)u\rangle \geq 0$$

Alors

$$G(s) + G(s)^* \geq 0 \qquad \forall s \in \mathbb{C}_0$$

□

1.5 Système à diffusion passive

Définition 1.5.1. *Le système* (Σ) *est appelée à diffusion passive si le long des solutions de (1.1),*

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2 \tag{1.6}$$

Proposition 1.5.2. *Le système* (Σ) *est à diffusion passive si est seulement si les opérateurs* $\Sigma(\tau, t)$ *de (1.3) sont des contractions.*

Preuve. Soient $x \in X$ et $u \in U$
(Σ) est à diffusion passive alors

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2$$

On intègre sur l'intervalle $[\tau, t]$, on trouve :

$$\|x(t)\|^2 - \|x(\tau)\|^2 \leq \int_\tau^t [\|u(s)\|^2 - \|y(s)\|^2] ds$$

D'où

$$\|x(t)\|^2 + \int_\tau^t [\|y(s)\|^2\, ds \leq \|x(\tau)\|^2 + \int_\tau^t [\|u(s)\|^2\, ds$$

Par conséquent

$$\left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]} y \end{bmatrix} \right\|^2_{X \times L^2([\tau,t],Y)} \leq \left\| \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]} u \end{bmatrix} \right\|^2_{X \times L^2([\tau,t],U)}$$

qui n'est autre que

$$\left\| \sum(\tau, t) \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]} u \end{bmatrix} \right\|^2_{X \times L^2([\tau,t],Y)} \leq \left\| \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \mathbf{P}_{[\tau,t]} u \end{bmatrix} \right\|^2_{X \times L^2([\tau,t],U)}$$

Donc

$$\left\| \sum(\tau, t) \right\|^2 \leq 1$$

□

Théorème 1.5.3. *Le système $(\sum)$ est à diffusion passive si est seulment si :*

$$\begin{bmatrix} A + A^* & B & C^* \\ B^* & -I & D^* \\ C & D & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

Preuve. En considérant le système suivant :

$$(\tilde{\Sigma}) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_1(t) = \frac{1}{2}u(t) \\ y_2(t) = -y(t) + \frac{1}{2}u_2(t) \end{cases}$$

où $u(t)$ est le contrôle du système (Σ) et $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ est la sortie du système (Σ).
On réecrit le système $(\tilde{\Sigma})$ comme suit :

$$(\tilde{\Sigma}) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I & 0 \\ -D & \frac{1}{2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Alors

$$T = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C & D & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix}, \quad T^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 & C^* \\ B^* & -\frac{1}{2}I & D^* \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix}$$

Donc

$$T + T^* = \begin{bmatrix} A + A^* & B & C^* \\ B^* & -I & D^* \\ C & D & -I \end{bmatrix}$$

Supposons que

$$T + T^* \leq 0$$

Alors

$$T + T^* \text{ est dissipatif.}$$

Donc le système $(\tilde{\Sigma})$ est à impédance passive (d'aprés le théorème (1.4.2)) par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &\leq 2Re\left\langle \begin{bmatrix} u(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u(t) \\ \frac{1}{2}u_2 - y(t) \end{bmatrix} \right\rangle \\ &\leq 2Re\left[\left\langle u(t), \frac{1}{2}u(t) \right\rangle + \left\langle u_2(t), \frac{1}{2}u_2(t) - y(t) \right\rangle\right] \end{aligned}$$

Pour $u_2(t) = y(t)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &\leq Re\left[\langle u(t), u(t)\rangle - \langle y(t), y(t)\rangle\right] \\ &\leq \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2 \end{aligned}$$

Alors le système (Σ) est à diffusion passive.
Maintenant, on suppose que le système (Σ) est à diffusion passive.
Alors

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2$$

On a l'estimation

$$-\frac{1}{2}\|y(t)\|^2 \leq Re\langle u_2(t), \frac{1}{2}u_2(t) - y(t)\rangle$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &\leq \|u(t)\|^2 + 2Re\langle u_2(t), \frac{1}{2}u_2(t) - y(t)\rangle \\ &\leq 2Re\langle u(t), u(t)\rangle + 2Re\langle u_2(t), \frac{1}{2}u_2(t) - y(t)\rangle \\ &\leq 2Re\left\langle \begin{bmatrix} u(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u(t) \\ \frac{1}{2}u_2 - y(t) \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Alors le système $(\tilde{\Sigma})$ est à impédance passive.
Ce qui implique

$$T + T^* \text{ est dissipatif.}$$

□

Proposition 1.5.4. *Si $(\sum)$ est à diffusion passive alors la matrice A est dissipative.*

Preuve. Soient $x \in X$, $u_1 \in U$ et $u_2 \in U$
Supposons que $(\sum)$ est à diffusion passive alors

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A+A^* & B & C^* \\ B^* & -I & D^* \\ C & D & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0$$

qui n'est autre que

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (A+A^*)x + Bu_1 + C^*u_2 \\ B^*x - Iu_1 + D^*u_2 \\ Cx + Du_1 - Iu_2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0$$

Donc
$\langle x, Ax\rangle + \langle x, A^*\rangle + \langle x, Bu_1\rangle + \langle x, C^*u_2\rangle + \langle u_1, B^*x\rangle - \langle u_1, u_1\rangle + \langle u_1, D^*u_2\rangle$

$+ \langle u_2, Cx\rangle + \langle u_2, Du_1\rangle - \langle u_2, u_2\rangle \leq 0$

$2Re\,\langle x, Ax\rangle + 2Re\,\langle x, Bu_1\rangle + 2Re\,\langle Cx, u_2\rangle + 2Re\,\langle u_2, Du_1\rangle - \|u_1\|^2 - \|u_2\|^2 \leq 0$

Pour $u_1 = u_2 = 0$ on trouve

$$2Re\,\langle x, Ax\rangle \leq 0$$

Alors A est dissipative. □

1.6 Relation entre impédance et diffusion passive

Les systèmes à diffusion passive peuvent être obtenus à partir de ceux à impédance passive par la transformation de Cayley de la manière suivante : si e et$f$ sont les signaux d'entrée et de sortie d'un système à impédance passive Σ_{imp} alors les signaux d'entrée et de sortie d'un système à diffusion passive Σ_{sca} sont

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e-f), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e+f) \tag{1.7}$$

alors :

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+y), f = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-y)$$

Pour le système Σ_{imp}

$$(\Sigma_{imp}) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ f(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

On a

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le 2Re\langle e, f\rangle$$

Pour le système Σ_{sca}

$$(\Sigma_{sca})\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

On a

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \le \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2$$

Théorème 1.6.1. *Σ_{imp} est à impédance passive si est seulement si Σ_{sca} est à diffusion passive.*

Preuve. Supposons que Σ_{imp} est à impédance passive alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &\le 2Re\langle e, f\rangle \\ &\le 2Re\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(u+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(u-y)\right\rangle \\ &\le Re(\|u(t)\|^2 - \langle u, y\rangle + \langle y, u\rangle - \|y(t)\|^2 \\ &\le Re(\|u(t)\|^2 - \langle u, y\rangle + \langle y, u\rangle - \|y(t)\|^2) \\ &\le \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2\end{aligned}$$

Donc Σ_{sca} est à diffusion passive.

Maintenant supposons que Σ_{sca} est à diffusion passive alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &\le \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2 \\ &\le \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(e-f)\right\|^2 - \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(e+f)\right\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}\langle e+f, e+f\rangle - \frac{1}{2}\langle e-f, e-f\rangle \\ &\le 2Re\langle e, f\rangle\end{aligned}$$

Donc Σ_{imp} est à impédance passive. □

Proposition 1.6.2. (Staffans [5],[6]) *Supposons que $A_{imp}, B_{imp}, C_{imp}, D_{imp}$ détermine via (1.1), un système à impédance passive Σ_{imp} alors la matrice*

$$E_{imp} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ C_{imp} & I + D_{imp} \end{bmatrix}$$

est inversible.
On définit le système Σ_{sca} par ses matcices $A_{sca}, B_{sca}, C_{sca}, D_{sca}$ avec

$$\begin{bmatrix} A_{sca} & B_{sca} \\ C_{sca} & D_{sca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{imp} & B_{imp} \\ 0 & \sqrt{2}I \end{bmatrix} E_{imp}^{-1}$$

alors Σ_{sca} est un système à diffusion passive.
Nous avons : $E_{imp}^{-1} = E_{sca}$ où

$$E_{sca} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_{sca} & I + D_{sca} \end{bmatrix}$$

et Σ_{imp} peut être récupéré á partir Σ_{sca} tel que

$$\begin{bmatrix} A_{imp} & B_{imp} \\ C_{imp} & D_{imp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{sca} & B_{sca} \\ 0 & \sqrt{2}I \end{bmatrix} E_{sca}^{-1}$$

Chapitre 2

Systèmes linéaires bien posés

2.1 Intoduction

Soient X, U, Y trois espaces de Hilbert. Une large classe des systèmes linéaires de dimension infinie peuvent être décrits sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $A : D(A) \subset X \to X$ opérateur linéaire engendrant un C_0-semigroupe.
- $B : U \to X$ opérateur linéaire borné où non borné.
- $C : X \to Y$ opérateur linéaire borné où non borné.

Exemple 2.1.1. *Considérons le système de contrôle gouverné par l'equation de la chaleur .*

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + u(x,t) \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ z(0,t) = z(1,t) = 0 \qquad t > 0 \\ y(t) = \int_0^1 z(x,t)dx \end{cases}$$

avec $X = U = L^2(0,1), Y = \mathbb{R}$
Ce système se réecrit sous la forme abstraite (2.1).
Les opérateurs A, B, C *et* D *sont définis comme suit :*

$$A : D(A) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$$

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(0,1), \frac{d^2 f}{dx^2} \in L^2(0,1), f(0) = f(1) = 0 \right\} = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

A est un opérateur linéaire de domaine dense engendrant un C_0−semigroupe.

$$B : U \to X$$

avec

$$Bf = f \quad et \quad B \in \mathcal{L}(U, X)$$

$$C : X \to Y$$

avec

$$Cf = \int_0^1 f(x,t)dx \quad et \quad C \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Exemple 2.1.2. (Guo et Shao [2]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1}$.*
Dans Ω on considère l'equation de Schrödinger avec contrôle et observation frontières.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) + i\Delta z(x,t) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ z(x,t) = 0, & x \in \Gamma_1, \quad t \geq 0, \\ z(x,t) = u(x,t), & x \in \Gamma_0, \quad t \geq 0, \\ y(t) = i\frac{\partial(\Delta^{-1}z)}{\partial\nu}, & x \in \Gamma_0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où

- *ν est le vecteur normale à Γ_0 s'orientant vers l'exterieur de Ω, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ est la dérivée normale.*
- *u est le contrôle, et y est l'observation.*

Soient $X = H^{-1}(\Omega)$ l'espace d'etat, et $U = L^2(\Gamma_0)$ ($Y = L^2(\Gamma_0)$) l'espace de contrôle (l'espace d'observation).
Ce système se récrit sous la forme abstraite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = B^*x(t) \end{cases}$$

où

- $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$

$$Af = -i\Delta, \qquad \mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega)$$

- $B : U \longrightarrow X = H^{-1}(\Omega)$

$$Bu = iA\Upsilon u$$

où $\Upsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_0), L^2(\Omega))$ est l'opérateur de Dirichlet défini par

$$\Upsilon u = v \quad si\ est\ seulement\ si \begin{cases} \Delta v = 0 & dans\ \Omega \\ v = 0 & sur\ \Gamma_1 \\ v = u & sur\ \Gamma_0 \end{cases}$$

2.2 Les espaces X_1 et X_{-1}

Soient X un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe T sur X.
On définit les espaces de Hilbert suivants :

- X_1 est $D(A)$ muni de la norme $\|z\|_1 = \|(\beta I - A)z\|_X$ où $\beta \in \rho(A)$.
- X_{-1} est la complétude de X par rapport à la norme $\|z\|_{-1} = \left\|(\beta I - A)^{-1}z\right\|_X$ où $\beta \in \rho(A)$.

X_{-1} est la dual de $D(A^*)$ par rapport à l'espace pivot X, et on a

$$X_1 \subset X \subset X_{-1} \tag{2.2}$$

Le semigroupe T peut être prolongé à X_{-1}, et son générateur est une extension de A son domaine est X.
On définit les espaces de Hilbert suivants :

- X_1^d est $D(A^*)$ avec la norme $\|z\|_1^d = \|(\beta I - A^*)z\|$.
- X_{-1}^d est la complétude de X par rapport à la norme $\|z\|_{-1}^d = \left\|(\beta I - A^*)^{-1}z\right\|$.

Le produit scalaire de X possède une extension continue de $X_1 \times X_{-1}^d$ à $X_1^d \times X_{-1}$, alors X_{-1}^d est le dual de X_1 et X_{-1} est le dual de X_1^d par rapport à l'espace pivot X .

2.3 Opérateurs de contrôle admissibles

Soient U un espace de Hilbert, $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$. Pour $t > 0$, on définit l'opérateur $\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2[0, \infty); U), X_{-1})$ par

$$\Phi_t u = \int_0^t T(t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \tag{2.3}$$

Définition 2.3.1. $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ *est appelé un opérateur de contrôle admissible pour* T *si pour* $t > 0$ *(et donc pour tout* $t > 0$*),* $\Phi_t u \in X$.

Remarque 2.3.2. *Si* $B \in \mathcal{L}(U, X)$*, alors* B *est admissible.*

Proposition 2.3.3. (Tucsnak et Weiss [7]) *Supposons que* $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ *est un opérateur de contrôle admissible pour* T*.*
Alors pour chaque $x_0 \in X$ *et chaque* $u(.) \in L^2_{loc}([0, +\infty); U)$*, le problème de la valeur intiale*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

a une solution unique dans X_{-1}*. Cette solution est donnée par*

$$x(t) = \mathbb{T}(t)x_0 + \Phi_t u$$

et elle satisfait

$$x \in C([0, +\infty); X) \cap H^1_{loc}((0, +\infty); X_{-1})$$

2.4 Opérateurs d'observation admissibles

Soient Y un espace de Hilbert et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$. Pour $t > 0$, on définit l'opérateur $\Psi_t \in \mathcal{L}(X_1, L^2[0,t);Y))$ par

$$(\Psi_t x_0)(\tau) = C\mathbb{T}(\tau)x_0 \quad \forall\, \tau \in [0,t] \tag{2.4}$$

Définition 2.4.1. *L'opérateur $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ est appelé un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$ si pour $t > 0$, Ψ_t à un prolongement continue à X. Ceci est équivalent à dire que pour $t > 0$ il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\int_0^t \|C\mathbb{T}(\tau)x_0\|_Y^2 \, d\tau \leq k \|x_0\|_X^2 \quad \forall\, x_0 \in X_1$$

Remarque 2.4.2. *Si $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors, C est admissible.*

2.5 Dualité entre les deux concepts d'admissibilité

Proposition 2.5.1. (Tucsnak et Weiss [7], [8]) *$C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ est un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$ si et seulement si $C^* \in \mathcal{L}(Y, X_{-1}^d)$ est un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}^*$.*

2.6 Fonction de transfert engendré par (A, B, C)

Définition 2.6.1. *Notons par*

$$\mathbb{C}_{\omega_0(\mathbb{T})} = \{s \in \mathbb{C} \quad | \quad Res > \omega_0(\mathbb{T})\}$$

Soit la fonction

$$\boldsymbol{G} : \mathbb{C}_{\omega_0(\mathbb{T})} \longrightarrow \mathcal{L}(U, Y)$$

telle que pour chaque $s, \beta \in C_{\omega_0(\mathbb{T})}$

$$\boldsymbol{G}(s) - \boldsymbol{G}(\beta) = (\beta - s)C(\beta I - A)^{-1}(sI - A)^{-1}B = C[(sI - A)^{-1} - (\beta I - A)^{-1}]B \tag{2.5}$$

Alors $\boldsymbol{G}$ est appelée la fonction de transfert engendré par le triplet (A, B, C).

2.7 Systèmes linéaires bien posés

Définition 2.7.1. *Le triplet d'opérateurs (A, B, C) définit un système bien posé sur (U, X, Y) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *A est le générateur d'un C_0-semigroupe $\mathbb{T}$ sur X,*

(2) *$B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ est un opérateur de contrôle admissible pour le semi-groupe $\mathbb{T}$,*

(3) *$C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ est un opérateur d'observation admissible pour le semi-groupe $\mathbb{T}$,*

(4) *Pour* $x_0 \in X$, *et* $u(.) \in L^2([0,t];U)$, *l'etat et la sortie correspendants vérifient l'estimation :*

$$\|x(t)\|_X^2 + \int_0^t \|y(\tau)\|_Y^2 \, d\tau \leq c_\tau \left(\|x(0)\|_X^2 + \int_0^t \|u(\tau)\|_U^2 \, d\tau \right)$$

Proposition 2.7.2. (Tucsnak et Weiss [8]) *La condition* (4) *de la définition* 2.7.1 *est equivalente à :*

(5) *certain (ainsi chaque) fonction de transfert* $\boldsymbol{G}$ *associée à* (A,B,C) *(c'est à dire, satisfaisant (2.5)) est propre (c.à.d elle est borné sur le demi-plan droit* $\sup_{Res>\alpha} \|\boldsymbol{G}(s)\| < \infty$*).*

(6) *certain (ainsi chaque) fonction de transfert* $\boldsymbol{G}$ *associée à* (A,B,C) *(c.à.d vérifiant (2.5)) est borné sur une ligne verticale* $\{s \in \mathbb{C} \quad | \quad Res = \alpha\}$
où $\alpha > \omega_0(T)$*.*

2.8 Systèmes réguliers

Définition 2.8.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Hilbert et soit* $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$*.* Λ*-extension de* C *est l'opérateur*

$$C_\Lambda x_0 = \lim_{\lambda \to \infty} C\lambda(\lambda I - A)^{-1} x_0$$

avec

$$\mathcal{D}(C_\lambda) = \{x_0 \in X \quad | \quad \lim_{\lambda\to\infty} C\lambda(\lambda I - A)^{-1} x_0 \quad \textit{existe} \quad \}$$

Définition 2.8.2. *Le système* Σ *est appelé régulier si la limite suivante existe, pour chaque* $v \in U$

$$lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \boldsymbol{G}(\lambda)v = Dv \tag{2.6}$$

L'opérateur $D \in \mathcal{L}(U,Y)$ *défini par (2.6) est appelé l'opérateur de "feedthrough" de* Σ*.*

Théorème 2.8.3. (Weiss [9],[10]) *Si* Σ *est régulier, la sortie* y *de* Σ *est donnée par*

$$y(t) = C_\Lambda x(t) + Du(t) \tag{2.7}$$

Théorème 2.8.4. (Weiss [10]) *Supposons que* Σ *est régulier. Alors* $\boldsymbol{G}$ *est donnée par*

$$\boldsymbol{G}(s) = C_\Lambda(sI - A)^{-1}B + D \qquad Res > \omega_0(T)$$

(En particulier, $(sI - A)^{-1}BU \subset \mathcal{D}(C_\Lambda)$*).*

Théorème 2.8.5. (Tucsnak et Weiss [8]) *Les deux propositions suivantes sont equivalentes :*

(1) Σ *est régulier.*

(2) *Il existe* $s \in \rho(A)$ *telle que* $(sI - A)^{-1}BU \subset \mathcal{D}(C_\Lambda)$*.*

2.9 Exemples

Exemple 2.9.1. *Soient $X = l^2$, $U = Y = \mathbb{C}$. On montre que le triplet d'opérateurs A, B, C donnés par :*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

ne décrit pas um système bien posé.
On a

$$A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$$

avec

$$(Ax)_k = -kx_k \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ x \in l^2 \quad | \quad Ax \in l^2 \right\} \\ &= \left\{ x \in l^2 \quad | \quad \|Ax\|_{l^2}^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ x \in l^2 \quad | \quad \textstyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1 + |\lambda_k|^2) \, |x_k|^2 < +\infty \right\} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_k = -k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

et les fonctions propres correspondantes sont données par

$$f_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}, f_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \cdots, f_k = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \cdots$$

Remarquons que les valeurs propres λ_k vérifient

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} Re(\lambda_k) = -\sigma < 0 \tag{2.8}$$

Le semigroupe engendré par A est défini comme suit :

$$(\mathbb{T}_t x)_k = e^{-\lambda_k t} x_k = e^{-kt} x_k, \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

puisque $0 \in \rho(A)$, la norme de X_{-1} peut être définie par

$$\|x\|_{X_{-1}} = \left\| A^{-1} x \right\|_X = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_k|^2}{|k|^2}$$

Maintenant on vérifie que $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ *et* $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$

$$\begin{aligned} \|Bu\|^2_{X_{-1}} &= \left\|A^{-1}Bu\right\|^2_X \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|u|^2}{k^2} \\ &= (\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2})\,|u|^2 \\ &\leq c_1 \|u\|^2_U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Cx\|^2_Y &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right|^2 \\ &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} k x_k\right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 |x_k|^2\right) \\ &\leq c_2 \|x\|^2_{X_1} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on va montrer que B *est admissible pour le semigroupe* $\mathbb{T}_t$*, et par conséquent* C *est admissible pour le semigroupe* $\mathbb{T}_t$ *car* $B^* = C$ *et* $\mathbb{T}_t^* = \mathbb{T}_t$*. Pour ce faire on définit le critère de la mesure de Carleson et on enonce un résultat caractérisant l'admissibilité en terme de ce critère.*

Définition 2.9.2. *Soit* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes satisfaisant (2.8) on dit que la suite complexe b vérifie le critère de la mesure de Carleson pour la suite* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *, si pour tout* $h > 0$ *et pour tout* $w \in \mathbb{R}$

$$\Sigma_{-\lambda_k \in R(h,w)} |B_k|^2 \leq Mh$$

où b_k *est la* k *ème-composante de* b*,* $M > 0$ *et indépendante de* h *et* w
et $R(h, w) = \{z \in \mathbb{C} \quad |0 \leq Rez \leq h, \quad |Imz - w| \leq h\}$ *pour tout* $h > 0$ *et* $w \in \mathbb{R}$*.*

Théorème 2.9.3. (Ho et Russell [3]) *Soit le semi-groupe* $\mathbb{T}_t$ *donné par (2.9) satisfaisant (2.8). b est admissible si est seulement si b vérifie le critère de la mesure de Carleson.*

Soient $h > 0$ *et* $w > 0$*. Il existe* $N \in \mathbb{N}^*$
tel que

$$0 < -\lambda_1 < -\lambda_2 < \cdots < -\lambda_N \leq h$$

et

$$-\lambda_{N+1} > h, \quad -\lambda_k \in R(h, w) \quad \text{pour tout} \quad k = 1, \cdots N$$

Alors

$$\sum_{-\lambda_k \in R(h,w)} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{N} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{N} 1 = N \leq Mh$$

avec $M = 1$.
D'aprés le theorème 2.9.3, B *est admissible pour le semigroupe* $\mathbb{T}_t$.
On vérifie que $\boldsymbol{G}$ *n'est pas borné.*
On a

$$\boldsymbol{G}(s) - \boldsymbol{G}(\beta) = (s-\beta)[-C(sI-A)^{-1}(\beta I - A)^{-1}B]$$

pour $\beta = 0$ *on trouve* $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}(0) - sC(sI-A)^{-1}(-A)^{-1}B$
Alors $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}(0) - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{s}{k(s+k)}$
pour s *réel,* $\lim_{s\to\infty} |\boldsymbol{G}(s)| = \infty$
Si à laplace de C*, on considère l'opérateur*

$$C^a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

alors le triplet (A, B, C^a) *définit un système bien posé.*
La démonstration de l'admissibilité de C^a *pour le semigroupe* $\mathbb{T}_t$ *est similaire à celle de l'admissibilité de* B *pour* $\mathbb{T}_t$.
La fonction de tansfert correspondante vérifie

$$\boldsymbol{G}(s) - \boldsymbol{G}(\beta) = (s-\beta)[-C^a(sI-A)^{-1}(\beta I - A)^{-1}B]$$

pour $\beta = 0$ *on trouve* $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}(0) - sC^a(sI-A)^{-1}(-A)^{-1}B$
Alors

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(s) &= \boldsymbol{G}(0) - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^{k+1} \left(\frac{s}{k(s+k)}\right) \\
&= \boldsymbol{G}(0) - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(s+k)}\right) \\
&= \boldsymbol{G}(0) - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(s+2n-1)(s+2n)}
\end{aligned}$$

Les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)2n}$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(s+2n-1)(s+2n)}$ *sont convergentes.*
Alors $\boldsymbol{G}$ *est borné dans* $\mathbb{C}_0$ *et le système décrit par le triplet* (A, B, C^a) *est bien posé.*
Pour étudier la régularité de ce système on utilise théorème 2.8.5 (2). Soit $u \in U$.
Puisque $0 \in \rho(A)$*, montrons que* $(-A)^{-1}BU \subset \mathcal{D}(C^a_\Lambda)$*, c'est à dire montrons que la limite*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} C^a \lambda(\lambda I - A)^{-1}A^{-1}Bu$$

existe.
Alors

$$C^a \lambda(\lambda I - A)^{-1}A^{-1}Bu = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}\lambda}{k(\lambda+k)}\right) u$$

On a

$$\frac{\lambda^2+3\lambda}{2(\lambda+1)(\lambda+2)} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}\lambda}{k(\lambda+k)} \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}\lambda}{k(\lambda+k)} \leq 1$$

Alors la limite existe. Donc il existe $s \in \rho(A)$ tel que $A^{-1}BU \subset \mathcal{D}(C^a_\Lambda)$ ce qui implique que le système décrit par le triplet (A, B, C^a) est régulier.

Exemple 2.9.4. (Guo et Shao [2])
Le système donné dans l'exemple 2.1.2 est bien posé avec espace d'etat $H^{-1}(\Omega)$ et espace de contrôle et observation $L^2(\Gamma_0)$. Il est aussi régulier avec $D = 0$.

Chapitre 3

Systèmes nœuds

3.1 Systèmes nœuds et solutions des equations du système

Définition 3.1.1. *Soient U, Y deux espaces de Hilbert, $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$. Soit $\boldsymbol{G}$ la fonction de transfert engendrée par (A, B, C) .*
Alors $\Sigma_{node} = (A, B, C, \boldsymbol{G})$ est appelé un système nœud sur (U, X, Y).

L'opérateur d'observation et de feedthrough combinés de Σ_{node} est défini par

$$C\&D \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = C[x - (\beta I - A)^{-1}Bu] + \mathbf{G}(\beta)u \tag{3.1}$$

avec

$$\mathcal{D}(C\&D) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in X \times U | Ax + Bu \in X \right\}.$$

On a la relation suivante entre $C\&D$ et $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G}(s) = C\&D \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \qquad \forall s \in C_{\omega_0(T)} \tag{3.2}$$

La norme naturelle sur $\mathcal{D}(C\&D)$ est

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\|^2_{\mathcal{D}(C\&D)} = \|x\|^2_X + \|u\|^2_U + \|Ax + Bu\|^2_X . \tag{3.3}$$

Avec cette norme, $\mathcal{D}(C\&D)$ est un espace de Hilbert et

$$C\&D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(C\&D), Y) \tag{3.4}$$

Le système nœud $\Sigma_{node} = (A, B, C, \mathbf{G})$ peut être déterminé par :

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ \multicolumn{2}{c}{C\&D} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{D}(s) = \mathcal{D}(C\&D). \tag{3.5}$$

qui est un opérateur densement définie et fermé de $X \times U$ à $X \times Y$.
On définit l'espace

$$Z = \mathcal{D}(A) + (\beta I - A)^{-1} BU, \tag{3.6}$$

qui est indépendant de $\beta \in \rho(A)$.
Z est un espace de Hilbert avec la norme

$$\|z\|_Z^2 = \inf \left\{ \|x\|_1^2 + \|\nu\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X_1, \nu \in U \\ z = x + (\beta I - A)^{-1} B\nu \end{array} \right\} \tag{3.7}$$

Si $\begin{bmatrix} x \\ \nu \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(S)$, alors $x \in Z$ et on a $\|x\|_Z \leq m \left\| \begin{bmatrix} x \\ \nu \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{D}(C\&D)}$ pour tout $m > 0$ indépendante de x et ν.
Le système nœud est appelé compatible si C admet un prolongement continu à un opérateur $\overline{C} \in \mathcal{L}(Z, Y)$.
Dans ce cas, on peut définir l'opérateur $D \in \mathcal{L}(U, Y)$ par

$$D = \mathbf{G}(\beta) - \overline{C}(\beta I - A)^{-1} B$$

et d'aprés (2.5) D est indépendant de $\beta \in \rho(A)$. Alors $C\&D$ et S prennent leur forme qui est familière à la théorie des systèmes de dimensions finie :

$$C\&D \begin{bmatrix} x \\ \nu \end{bmatrix} = \overline{C}x + D\nu, \qquad S = \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{C} & D \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

et on a

$$\mathbf{G}(s) = \overline{C}(sI - A)^{-1} B + D \qquad \forall \quad s \in \rho(A). \tag{3.9}$$

Le système nœud est généralement associé à l'equation

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad \forall \quad t \geq 0, \tag{3.10}$$

où S est l'opérateur du système Σ_{node}. De manière équivalente,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\&D \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.1.2. *Soit S un opérateur linéaire fermé de $X \times U$ à $X \times Y$, de domaine $\mathcal{D}(S)$.*

Le triplet (x, u, y) est appelé une solution classique de (3.10) sur $[0, \infty)$ si :

1. $x \in C^1([0, \infty); X)$,
2. $u \in C([0, \infty); U), y \in C([0, \infty); Y)$,
3. $\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(S)$ *pour tout* $t \geq 0$,
4. (3.10) *est vérifiée.*

Le triplet (x, u, y) est appelé une solution générale de (3.10) sur $[0, \infty)$ si :

5. $x \in C([0,\infty);X)$,
6. $u \in L^2_{loc}([0,\infty);U), y \in L^2_{loc}([0,\infty);Y)$
7. *il existe une suite* (x_k, u_k, y_k) *de solutions classiques de* (3.10) *de telle sorte que* $x_k \to x$ *dans* $x \in C([0,\infty);X)$, $u_k \to u$ *dans* $L^2_{loc}([0,\infty);U)$, $y_k \to y$ *dans* $L^2_{loc}([0,\infty);Y)$.

Une résultat des conditions (1) et (2) de ci-dessus est que chaque solution classique de (3.10) sur $[0,\infty)$ satisfait

8. $\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in C([0,\infty);\mathcal{D}(S))$

Proposition 3.1.3. *Soit* Σ_{node} *un système nœud sur* (U,X,Y)*. Si* $u \in C^2([0,\infty);U)$ *et* $\begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(C\&D)$*, alors les equations de* (3.11) *admettent une solution classique unique* (x,u,y) *satisfaisant* $x(0) = x_0$*. De plus, cette solution classique satisfait*

$$x \in C^2([0,\infty);X_{-1})$$

Preuve. Soient $u \in C^2([0,\infty);U)$ et $\begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(C\&D)$ c.à.d $\begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix} \in X \times U$ tel que $Ax_0 + Bu_0 \in X$
Supposons que $B \in \mathcal{L}(U,X_{-1})$ est un opérateur de contrôle admissible.
On montre que le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\&D \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

admet une solution classique unique (x,u,y) satisfaisant $x(0) = x_0$ et $x \in C^2([0,\infty);X_{-1})$
On note $\mathcal{U} = C([0,\infty);U)$. Pour tout $t \geq 0$ on définit dans $X \times \mathcal{U}$ l'opérateur borné

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_t & \Phi_t \\ 0 & S_t \end{bmatrix}$$

tel que

$$\Phi_t u = \int_0^t \mathbb{T}(t-\sigma)B\delta_0 u(\sigma)d\sigma$$

S_t est le semi-groupe unilatérale shift gauche de générateur $\frac{d}{d\xi}$.
$\mathcal{T}$ est un semi-groupe fortement continue, de générateur $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B\delta_0 \\ 0 & \frac{d}{d\xi} \end{bmatrix}$ avec $\delta_0 u = u(0)$, $\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \in X \times C^2([0,\infty);U) | \begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(C\&D) \right\}$
Puisque $u \in C^2([0,\infty);U)$ et $\begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(C\&D)$
alors $\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Soit la fonction $z(t) = \mathcal{T} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix}$ de classe C^1 à valeurs

dans $X \times \mathcal{U}$, ce qui implique que x (la première composante de z) est de classe C^1 à valeurs dans X. $\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ implique que z est continue à valeurs dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ce qui implique que la fonction $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{bmatrix} z$ est continue à valeurs dans $\mathcal{D}(C\&D)$.

On définit l'opérateur $\mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to Y$ avec $\mathcal{C} = C\&D \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{bmatrix}$ c.à.d

$$\mathcal{C} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = C\&D \begin{bmatrix} x_0 \\ u(0) \end{bmatrix}$$

On a d'aprés la continuité de $C\&D$ sur $\mathcal{D}(C\&D)$ que $\mathcal{C}$ est borné de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dans Y. Pour

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

on définit la fonction

$$y(t) = \mathcal{C}\mathcal{T} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = C\&D \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix}$$

alors $y \in C([0, \infty), Y)$.
Donc (x, u, y) est une solution classique.
Montrons que x est une solution dans X_{-1} :
On a d'aprés la théorie des semi-groupes

$$\mathcal{T} \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = \mathcal{A} \int_0^t \mathcal{T}(\sigma) \begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} d\sigma$$

pour tout $t \geq 0$.
Donc

$$x(t) - x_0 = \int_0^t [Ax(\sigma) + Bu(\sigma)] d\sigma$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$, donc x la solution de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

est dans X_{-1}.
L'uncité de la solution est donnée par cette proposition :

Proposition 3.1.4. (Tucsnak et Weiss[7]) *Supposons que $x(t)$ est la solution de*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dans X_{-1} et on note $x(0) = x_0$. Alors $x(t)$ est donnée par

$$x(t) = \mathbb{T}_t x_0 + \int_0^t \mathbb{T}(t-s) Bu(s) ds \tag{3.12}$$

En particulier pour chaque $x_0 \in X$ il existe au plus une solution de (3.12) *dans* X_{-1}.

Maintenant on montre que la solution $x \in C^2([0,\infty); X_{-1})$:
On décompose $x = x_n + x_c$ où x_n est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_n = Ax_n + B[u - u_0] \\ x_n(0) = 0 \end{cases}$$

et x_c est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_c = Ax_c + Bu_0 \\ x_c(0) = x_0 \end{cases}$$

Lemme 3.1.5. (Tucsnak et Weiss[7]) *Si $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ est un opérateur de contrôle admissible de $\mathbb{T}_t$. Alors pour tout $u \in C^2([0,\infty); U)$ avec $u(0) = 0$ la solution $x(t)$ de*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec $x(0) = 0$ est un élément de $C^2([0,\infty); X_{-1})$

D'aprés le lemme de ci-dessus, $x_n \in C^2([0,\infty); X_{-1})$. En utilisant

$$\mathbb{T}_t z - z = A\int_0^t \mathbb{T}_\sigma z d\sigma \quad \textit{pour tout } z \in X$$

On obtient pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} Ax_c &= A(\mathbb{T}_t x_0 + \int_0^t \mathbb{T}(t-\tau)Bu(0)d\tau) \\ &= A(\mathbb{T}_t x_0 + \int_0^t \mathbb{T}(\sigma)Bu(0)d\sigma) \\ &= A\mathbb{T}_t x_0 + A\int_0^t \mathbb{T}(\sigma)Bu(0)d\sigma) \\ &= A\mathbb{T}_t x_0 + \mathbb{T}_t Bu(0) - Bu(0) \\ &= \mathbb{T}_t(Ax_0 + Bu(0)) - Bu(0) \end{aligned}$$

De cette formule on obtient : $\dot{x}_c = \mathbb{T}_t(Ax_0 + Bu(0))$ alors $x_c \in C^2([0,\infty); X_{-1})$ donc $x \in C^2([0,\infty); X_{-1})$ □

3.2 Systèmes linéaires passifs

Définition 3.2.1. *Le système nœud $\Sigma_{node} = (A, B, C, \boldsymbol{G})$ sur (U, X, Y) est appelé à impédance passive si $Y = U'$ (le dual de U) et toutes les solutions classiques de* (3.10) *satisfont, pour tout $t \geq 0$,*

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq 2Re\,\langle u(t), y(t)\rangle_{U,Y}\,. \tag{3.13}$$

Une condition équivalente est que toutes les solutions générales de (3.10) satisfont, pour chaque $\tau \geq 0$,

$$\|x(\tau)\|^2 - \|x(0)\|^2 \leq 2 \int_0^\tau Re \langle u(t), y(t) \rangle_{U,Y} \, dt \tag{3.14}$$

Théorème 3.2.2. (Staffans [5], [6]) *Si $U' = U$ alors Σ_{node} est à impédance passive si est seulement si l'opérateur*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C\&D \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{D}(C\&D) \tag{3.15}$$

est dissipatif sur $X \times U$.
De plus, on a égalité dans (3.13) *si est seulement si* $Re \left\langle \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ *pour tout* $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(C\&D)$.

Exemple 3.2.3. *Soit H un espace de Hilbert.*
On suppose que

$$A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$$

est positif d'inverse borné.
On introduit l'espace de Hilbert scalaire $H_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ comme suit : pour tout $\alpha \geq 0, H_\alpha = \mathcal{D}(A_0^\alpha)$, avec la norme $\|z\|_\alpha = \|A_0^\alpha z\|_H$.
L'espace $H_{-\alpha}$ est défini par dualité avec l'espace pivot H comme suit : $H_{-\alpha} = H_\alpha^*$ pour tout $\alpha > 0$. D'une façon équivalente $H_{-\alpha}$ est le complément de H par rapport à la norme la norme $\|z\|_{-\alpha} = \left\|A_0^{-\alpha} z\right\|_H$.
L'opérateur A_0 peut être prolongé (restreint) à chaque H_α tel qu'il devient un opérateur borné

$$A_0 : H_\alpha \to H_{\alpha-1} \qquad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On définit l'opérateur linéaire borné

$$C_0 : H_{\frac{1}{2}} \to U$$

où U est un autre espace de Hilbert identifié U avec son dual.
On note $B_0 = C_0^*$ alors

$$B_0 : U \to H_{-\frac{1}{2}}.$$

On considère le système décrit par

$$\ddot{z}(t) + A_0 z(t) = B_0 u(t), \tag{3.16}$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} C_0 z(t), \tag{3.17}$$

avec $t \in [0, \infty)$. L'equation (3.16) *est une equation dans $H_{-\frac{1}{2}}$.*
l'etat du système $x(t)$, son espace d'etat X et son générateur

$$A : H_1 \times H^{\frac{1}{2}} \to X$$

sont définis par

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \qquad X = H_{\frac{1}{2}} \times H, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

L'opérateur d'observation est $C = \begin{bmatrix} 0 & C_0 \end{bmatrix}$ *défini sur* $\mathcal{D}(A) = X_1 = H_1 \times H_{\frac{1}{2}}$, *alors que* $B = C^*$.
L'opérateur C *admet un prolongement* $\overline{C} : H_{\frac{1}{2}} \times H_{\frac{1}{2}} \to U$, *donné par la même formule.*
L'espace

$$Z = \mathcal{D}(A) + (\beta I - A)^{-1}BU \subset H_{\frac{1}{2}} \times H_{\frac{1}{2}}$$

On définit la fonction $\boldsymbol{G} \in \mathcal{L}(U)$ *par*

$$\boldsymbol{G}(s) = \overline{C}(sI - A)^{-1}B = sC_0(s^2I + A_0)^{-1}B_0 \quad \forall s \in \boldsymbol{C}_0$$

car on a par application de le transformée de Laplace sur (3.16) *et* (3.17) *:*

$$s^2\widehat{z}(s) + A_0\widehat{z}(s) = B_0\widehat{u}(s) \Rightarrow \widehat{z}(s) = (s^2I + A_0)^{-1}B\widehat{u}(s)$$

$$\widehat{y}(s) = sC_0(s^2I + A_0)^{-1}B\widehat{u}(s) = \widehat{y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\widehat{u}(s)$$

avec $\boldsymbol{G}$ *satisfaisant* (2.5). *Les equations* (3.16) *et* (3.17) *sont les equations du système* (3.11) *où* $C\&D$ *est défini par* $C\&D \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \overline{C}x$.

Proposition 3.2.4. $(A, B, C, \boldsymbol{G})$ *est un système nœud à impédance passive sur* (U, X, Y).

Preuve. Il suffit de montrer que $T^* = -T$.
Soient $(x, u) \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$ et $(f, g) \in \mathcal{D}(\mathbf{T}^*)$.
On a d'une part

$$\left\langle \mathbf{T}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \mathbf{T}^*\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{T}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U} &= \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{C} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Ax + Bu \\ -\overline{C}x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U} \\
&= \langle Ax + Bu, f\rangle_X + \langle -\overline{C}x, g\rangle_U \\
&= \langle x, A^*f\rangle_X + \langle u, B^*f\rangle_X + \left\langle x, -\overline{C}^*g \right\rangle_U \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^*f - \overline{C}^*g \\ B^*f \end{pmatrix} \right\rangle_{X\times U}
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^* & \overline{C}^* \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X \times U}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{X \times U}$$

Donc $\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{T}, \qquad \mathcal{D}(\mathbf{T}^*) = \mathcal{D}(\mathbf{T})$

$\square$

Définition 3.2.5. *Le système nœud $\Sigma_{node} = (A, B, C, \boldsymbol{G})$ est appelé à diffusion passive si toutes les solutions classiques de* (3.10) *satisfont, pour tout $t \geq 0$*

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq \|u(t)\|^2 - \|y(t)\|^2 . \tag{3.19}$$

Une condition équivalente si toutes les solutions générales de (3.10) satisfont, pour chaque $\tau \geq 0$

$$\|x(\tau)\|^2 + \int_0^\tau \|y(t)\|^2 \, dt \leq \|x(0)\|^2 + \int_0^\tau \|u(t)\|^2 \, dt. \tag{3.20}$$

Théorème 3.2.6. *Le système nœud $\Sigma_{node} = (A, B, C, \boldsymbol{G})$ sur (U, X, Y) est à diffusion passive si est seulement si l'opérateur*

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ C\&D & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\widehat{\boldsymbol{T}}) = \mathcal{C}\&\mathcal{D} \times Y, \tag{3.21}$$

est dissipatif sur $X \times U \times Y$.

Si Σ_{node} est compatible, alors avec la décomposition de $C\&D$ de (3.8) la dernière ligne de $\widehat{\mathbf{T}}$ devient $\begin{bmatrix} \overline{C} & D & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Preuve. Soient $\widetilde{\Sigma}_{node}$ un système nœud sur $(U \times Y, X, Y \times Y)$, u (la fonction d'entrée de Σ_{node}) est la première entrée.
On introduit la deuxième entrée v et on définit deux sorties
$y_1 = \frac{1}{2}u$ et $y_2 = \frac{1}{2}v - y$ où y est la sortie de Σ_{node}. Formellement,
$\widetilde{\Sigma}_{node} = (A, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{\mathbf{G}})$, où

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C \end{bmatrix} \quad et \quad \widetilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\mathbf{G} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Les solutions classiques de $\widetilde{\Sigma}_{node}$ sont les triplets $\left(x, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}v - y \end{bmatrix} \right)$ où (x, u, y) est la solution classique de Σ_{node} et $v \in C([0, \infty); Y)$.
On suppose que $\widehat{\mathbf{T}}$ est dissipatif, alors on a d'aprés le théorème 3.2.2 que $\widetilde{\Sigma}_{node}$ est à impédance passive. Donc, le long des solutions classiques (x, u, y) de Σ_{node} et pour tout $v \in C([0, \infty); Y)$ on a

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq 2Re \left[\left\langle u(t), \frac{1}{2}u(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{1}{2}v(t) - y(t) \right\rangle \right]$$

En particulier, on pose $v = y$ on trouve 3.19.
Inversement, on suppose que 3.19 est vérifiée pour toutes les solutions classiques de Σ_{node}. En utilisant $-\frac{1}{2}\left\|y_0\right\|^2 \leq \left\langle v_0, \frac{1}{2}v_0 - y_0\right\rangle$ pour tout $v_0, y_0 \in Y$, la première estimation est vérifiée, alors $\widetilde{\Sigma}_{node}$ est à impédance passive. D'aprés, le théorème 3.2.2, $\widehat{\mathbf{T}}$ est dissipatif. $\square$

Bibliographie

[1] I. Allag et S.E. Rebiai. Well posedness, regularity and exact controlability for the problem of transmission of the Schrödinger equation. Quarterly of Applied mathematics., LXXII : 93-108, 2014.

[2] B.Z. Guo and Z.C. Shao. Regularity of a Schrödinger equation with Dirichlet control and collocated observation. Syst. Contr. Lett., 54 : 1135-1142, 2005.

[3] L.F. Ho, D.L.Russell. Admissible Input Elements in Hilbet Space and Carleson Measure Criterion. SIAM J. Control and Optim., 21 : 614-640, 1983.

[4] D. Salamon. Infinite dimensional linear systems with unbounded control and observation : A functional analytic approach. Trans. Amer. Math. Soc., 300 : 383-431, 1987.

[5] O.J. Staffans. Passive and conservative continuous-time impedance and scattering systems. Part I : well-posed systems. Math. Control, Signals and Systems., 15 : 291-315,2002.

[6] O.J. Staffans. Passive and conservative infinite-dimensional impedance and scattering systems (from a personal point of view). In Mathematical Systems Theory in Biology, Communications, Computation, and Finance (Notre Dame,IN, 2002), volume 134 of IMA Vol. Math. Appl., 375-413. Springer, New York, 2003.

[7] Tucsnak and G. Weiss. Observation and Control for Operator Semigroups. Birkhauser Verlag, Basel, 2009.

[8] Tucsnak and G.Weiss. Well-posed systems The LTI case and beyond. Automatica., 50 : 1757 - 1779, 2014.

[9] G. Weiss. The representation of regular linear systems on Hilbert spaces. In F. Kappel, K. Kunisch, and W. Schappacher, editors, Control and Estimation of Distributed Parameter Systems (Vorau, 1988), volume 91 of Internat. Ser. Numer. Math., 401-416. Birkhäuser, Basel, 1989.

[10] G. Weiss. Transfer functions of regular linear systems. PartI : Characterizations of regularity. Trans. of the Amer. Math. Soc., 342 :827-854, 1994.