Chap 1:VARIABLES D'ETAT

La formulation par variables d'état est une approche directe dans le domaine temporel qui s'exprime par une équation différentielle matricielle du premier ordre. Les systèmes qui peuvent être représentés par variables d'état sont régis par des équations différentielles et peuvent être multi variables (plusieurs entrées et plusieurs sorties).

Pour représenter les informations dues à l'ordre et aux différentes entrées sorties, l'équation
Différentielle est matricielle.

Le vecteur de sortie est exprimé en fonction du vecteur d'entrée et d'un vecteur intermédiaire qui traduit l'état du système.

Les équations d'état ont la forme suivante :

$X(t) = A \cdot X(t)+B \cdot U(t)$ Equation d'état (1);
$Y(t)=C \cdot X(t)+D \cdot U(t)$ Equation des sortie (2)

Tel que: $U(t)$ vecteur d'entrée de dimension (e,1) ,$Y(t)$ vecteur de sortie de dimension (s,1) $X(t)$ vecteur d'état de dimension (n,1)

1. A Matrice d'état de dimension (n,n)
2. B Matrice d'entrée de dimension (n,e)
3. C Matrice de sortie de dimension (s,n)
4. D Matrice de couplage direct entrée sortie, de dimension (s,e)

Les équations (1) et (2) correspondent au schéma bloc de simulation suivant :

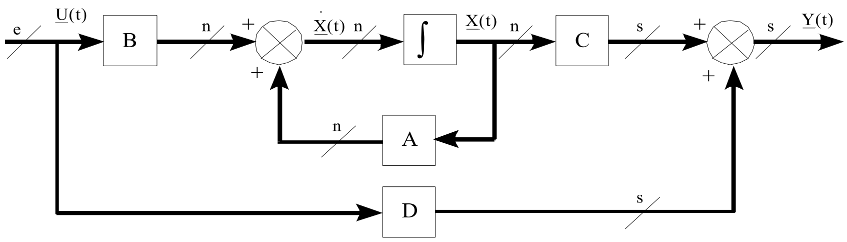


Figure 1 schéma bloc d'une représentation d'état.

Dans le cas mono variable s = e =1, la taille du vecteur d'état sera égale à l'ordre de l'équation différentielle.

Remarque

On doit noter ici que la formulation d'état n'est pas unique en effet le choix du vecteur d'etat nest pas unique.

2. Formulation par des équations d'état continues.

2.1 Solution analytique des équationsd'état.

Pour établir l'évolution temporelle de la sortie, il est nécessaire de résoudre l'équation d'état (1) puisque la sortie Y(t) est une combinaison linéaire de l'entrée U(t) ,le calcul de la sortie etant assuree par l'equation (2).

Pour resoudre cette equation on utilise la transformee de Laplace donnee ci dessous:

$$\mathcal{L}\left[\underline{\dot{X}}(t)\right] = \mathcal{L}\left[A \cdot \underline{X}(t) + B \cdot \underline{U}(t)\right]$$

On considére que la condition initiale du systeme est non nulle et est noteeX_0

D'ou l'on tire:

$$p.\underline{X}(p) = A \cdot \underline{X}(p) + \underline{X}_0 + B \cdot \underline{U}(p) \Rightarrow \left[p \cdot I - A\right]\underline{X}(p) = \underline{X}_0 + B \cdot \underline{U}(p) \tag{3}$$

La solution temporelle est donnee par la transformee inverse de Laplace:

$$\underline{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left[p \cdot I - A\right]^{-1}\right)\underline{X}_0 + \mathcal{L}^{-1}\left(\left[p \cdot I - A\right]^{-1}\right) * B \cdot \underline{U}(t) \tag{4}$$

Tel qu'on utilisant la matrice de transition (voir cours asservissement) on obtient:

$$\boxed{\underline{X}(t) = \Phi(t) \cdot \underline{X}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \underline{U}(\tau) \cdot d\tau} \tag{6}$$

Le premier terme de l'equation (6) represente la solution particuliere (regime libre) qui depend des conditions intiales alors que le second terme correspond au regime force.

3. Phénomènes énergétiques.

Afin d'établir une procédure systématique de modélisation quelque soit le domaine de la physique abordé nous allons nous appuyer sur un vocabulaire général traduisant les phénomènes énergétiques mis en jeux.

a/Variables de puissances.

La puissance est considérée comme le produit d'un effort par un flux.

Effort : e(t)   *Flux : f*(t)

Par exemple, pour un mouvement en translation, l'*effort* sera la force exprimée en newton et le *flux* la vitesse linéaire en m/s. Pour les phénomènes électriques l'*effort* sera la tension en volt et la variable de *flux* le courant en ampère.

La puissance et l'energie sont donnees respectivement par:

$P(t)=e(t).f(t).$

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau \qquad \boxed{E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau)\, f(\tau)\, d\tau} \tag{7}$$

Remarques

Pour les systemes electriques l'effort sera la tension et le flux le courant.

Les variables d'energie peuvent etre definies sous deux forms different:

Le moment generalise defini par l'integral de l'effort:

$$\boxed{p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau)\cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad dp(t) = e(\tau)\cdot d\tau} \tag{8}$$

Le deplacement generalise define par l'ntegral du flux:

$$\boxed{q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\cdot d\tau \quad \Rightarrow dq(t) = f(\tau)\cdot d\tau} \tag{9}$$

b/Notion d'energies Potentielles et Inertielles

Dans un système l'énergie est stockée ou dissipée. Les mécanismes de dissipations sont multiples mais aboutissent tous à une transformation en chaleur. C'est par exemple, l'effet joule pour les courants électriques, les frottements mécanique aux interfaces des déplacements.
Si l'on prend une voiture en mouvement uniforme, toute la puissance du moteur se dissipe en chaleur ; tout d'abord les déperditions thermique de la combustion du carburant, ces calories s'évacuant par les échanges thermiques du moteur, le radiateur et les gaz d'échappements ; ensuite nous avons tous les frottements solide/solide dans les pièces mécaniques en contact (paliers, engrenages de la boite à vitesse roues ...) ; enfin et c'est la plus grande partie, lorsque la vitesse s'accroît, les frottements de l'air sur la carrosserie.

Maintenant, si la voiture se trouve en haut d'une cote, elle disposera en plus de la puissance du moteur de l'énergie cinétique due à la vitesse (énergie inertielle) d'un plus provenant d'un dénivelé (énergie potentielle).

Nous allons maintenant généraliser ces deux formes d'énergie stockée.

Stockage de type inertiel.

La puissance étant le produit d'un effort par un flux l'énergie sera définie par la relation t

intégrale suivante: $E(t)=\int_0^t e(\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau+E¿¿)$. La définition du moment

généralisé (8) permet de faire le changement de variable dp=e(τ)dτ il vient:

$$\boxed{\mathrm{E}(p)=\int_{p_0}^{p} f(p)\,\mathrm{d}p+\mathrm{E}(p_0)} \qquad (10)$$

Stockage de type potentiel.

Ici nous allons définir le stockage de type potentiel comme l'intégrale d'un effort. Comme nous

l'avons vu précédemment l'énergie a la forme suivant: $E(t)=\int e(\tau)\cdot f(\tau)d\tau+E(t_0)$. Pour

faire apparaître l'*effort* nous prendrons la définition du déplacement généralisé (3.3)

qui permet d'opérer au changement de variable dq = f (τ)dτ , ce qui donne :

$$\boxed{\mathrm{E}(q)=\int_{q_0}^{q} \mathrm{e}(q)\,\mathrm{d}q+\mathrm{E}(q_0)} \qquad (11)$$

<u>Remarques</u>

Dans la categorie de l'energie inertielle on retrouve les inductances ,les inerties en rotation ,ect.. alors que pour l'energie potentielle on retrouve la tension stockee dans les condensateur, l'effort d'un resort ect..

4.Modélisation d'état à partir d'équations différentielles.

L a representation d’etat repose sur la notion d’energie;Il existe de multiples approches pour déterminer les équations d’état à partir d’un jeu d’équations différentielles.
Deux methodes seront traitees dans cette partie .
La première utilisera des grandeurs de type *effort* ou *flux,* telles la tension, le courant, la vitesse, la force, le couple.

La seconde s’appuiera sur une notion d’énergie. L’idée directrice sera ici de prendre comme variable d’état une quantité liée à l’énergie stockée. Nous prendrons ainsi comme variables d’état $p(t)$ et $q(t)$ correspondant respectivement au *moment généralisé* et au *déplacement généralisé*.

4.1 Application au domaine electrique

4.a/Le Condensateur

Pour un condensateur la tension correspond à l’intégrale du courant :

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau \qquad (12)$$

Sous forme derivee on aura: $i(t) = C \times \partial u / \partial t$ (13)

Sachant que la quantite d’electricite vaut: $Q(t) = \int i(\tau)\,d\tau$ en regard avec l’equation (12) il vient:

$$Q(t) = C \cdot U(t) \qquad (14)$$

En utilisant les variables d’energie formulees au paragraphe precedent la quantite d’electricite sera:

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau\,.$$

b/Energie Potentielle

$$E = \frac{C \cdot u^2}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C} \qquad (15)$$

c/Choix de la variable d’etat

Il est necessaire d’exprimer la derivee du vecteur d’etat en fonction de lui meme afin d’elaborer les equations d’etat.

Première approche.
Pour un condensateur la relation (12) montre que la tension est proportionnelle à l’intégrale du courant si on prend la tension comme variable d’etat on aura:

X₁(t)=u(t) $\Rightarrow \dot{x}_1(t)=\dfrac{i(t)}{C}$

Deuxieme approche

Cette fois on choisi comme variable d'etat le deplacement generalise correspondant a la charge Q(t) on aura alors:

$x_1(t)=Q(t)=C\cdot u(t)\Rightarrow \dot{x}_1(t)=i(t)$

4.b/L'inductance

Sachant que le courant est egal : $i(t)=\dfrac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau$ (16)

Sous forme de derive nous avons: $u(t)=L\cdot\dot{i}(t)$ (17)

Sachant que le flux dans l'inductance est donnee par :$\phi(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau$ on peut exprimer le moment generalise par :$p(t)=\int_0^t e(\tau¿)d\tau=p(t)=\int_0^t u(\tau¿)d\tau¿¿$ qui correspond au flux emmagasine dans l'inductance en vu de la relation (17).

$$\boxed{p(t)=\Phi(t)=L\cdot i(t)} \qquad (18)$$

<u>a/Energie inertielle</u>

$$E=\frac{L\cdot i^2}{2}=\frac{\square^2}{2\cdot L}$$

c/Choix des variables d'etat

Dans le cas de l'inductance on recherche une relation integrale pour le choix de la variable d'etat.

Première approche.

A partir de la relation (16) on peut voir que le courant est fonction de l'integral de la tension donc en choisisant i(t) comme variable d'etat on aura:

$x_1(t)=i(t)\Rightarrow \dot{x}_1(t)=\dfrac{u(t)}{L}$

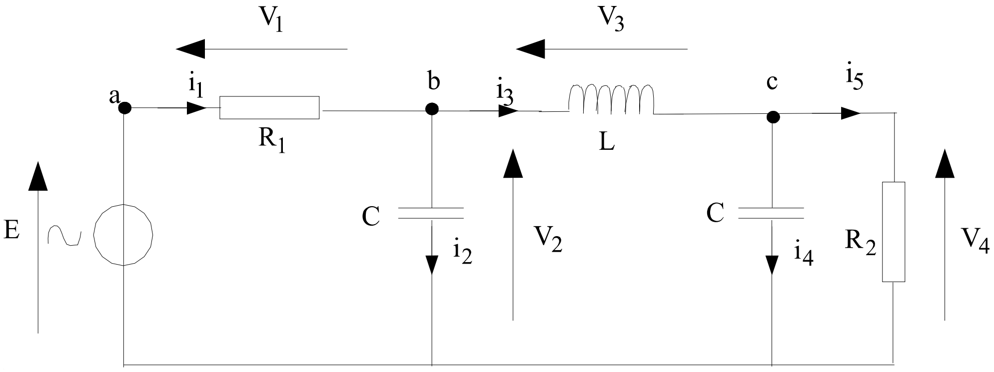
Deuxieme approche.

On choisi cette fois le moment generalise(flux) comme variable d'etat tel que:

$x_1(t)=\phi(t)=L\cdot i(t)\Rightarrow \dot{x}_1(t)=u(t)$

5. Application [poly JM.Retif]

Etablir les equation d'etat du circuit de la figure ci-dessous :



En utilisant les lois de Kirchoff on aura:

Lois des mailles :

$E = V_1 + V_2$ (1) avec $V_1 = R_1 \cdot I_1$ (2) soit $E = R_1 \cdot I_1 + V_2$ (3)

$V_2 = V_3 + V_4$ (4) avec $V_3 = L \cdot \dot{I}_3$ (5) soit $V_2 = L \cdot \dot{I}_3 + V_4$ (6)

$V_4 = R_2 \cdot I_5$ (7)

Lois des nœuds :

$I_1 = I_2 + I_3$ avec $I_2 = C \cdot \dot{V}_2$ (8)

$I_3 = I_4 + I_5$ avec $I_4 = C \cdot \dot{V}_4$ (9)

Pour établir les équations d'état il faut prendre une variable d'état par élément de stockage. Nous avons ici deux condensateurs et une inductance, il nous faudra donc trois variables d'état.

Première approche.

Ici nous prendrons comme variable d'état les tensions aux bornes des condensateurs et le courant dans l'inductance soit :

$X^T = [V_2 \quad V_4 \quad I_3]$ (10)

La grandeur d'entrée sera la tension E et la sortie la tension V_4 soit:

$Y = V_4 = x_2$ (11) U=E (12)

Avec ces notations les équations du circuit deviennent :

$U = R_1 \cdot I_1 + x_1$ (13) $x_1 = L \cdot \dot{x}_3 + x_2$ (14)

$x_2 = R_2 \cdot I_5$ (15) $I_1 = C \cdot \dot{x}_1 + x_3$ $x_3 = C \cdot \dot{x}_2 + I_5$ (16)

Pour la première composante d'état nous avons :

$x_1 = V_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{V}_2$ soit à partir de (4.18) $\dot{x}_1 = \frac{I_2}{C} = \frac{I_1 - I_3}{C} = \frac{I_1 - x_3}{C}$ en remplaçant I_1 dans l'équation (13) nous obtenons : $\boxed{\dot{x}_1 = \frac{U - x_1}{R_1 \cdot C} - \frac{x_3}{C}}$ (17)

$x_2 = V_4 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{V}_4$ soit à partir de (9) $\dot{x}_2 = \frac{I_4}{C} = \frac{I_3 - I_5}{C} = \frac{x_3 - I_5}{C}$ en remplaçant I_5 da

l'équation (16) nous obtenons $\boxed{\dot{x}_2 = \frac{x_3}{C} - \frac{x_2}{R_2 \cdot C}}$ (18)

Enfin pour la troisième composante il vient :

$x_3 = I_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{I}_3$ soit à partir de (5) $\dot{x}_3 = \frac{V_3}{L}$ en remplaçant V_3 dans l'équation (6

$\dot{x}_3 = \frac{V_2 - V_4}{L}$ soit $\boxed{\dot{x}_3 = \frac{x_1 - x_2}{L}}$ (19)

Les équations (17),(18) et (19) expriment lea derives du vecteur d'état en fonction de l même et de l'entrée U, la première équation d'état est donc définie.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 \cdot C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 \cdot C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 \cdot C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad (20)$$

La sortie se confondant avec la seconde composante du vecteur d'état nous obtenons :

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Seconde approche.

Nous prendrons ici l'énergie stockée dans les condensateurs et le flux dans l'inductance soit :

$x_1 = Q_1 = C \cdot V_2$ $\quad x_2 = Q_2 = C \cdot V_4$ $\quad x_3 = \Phi = L \cdot I_3$

$x_1 = C \cdot V_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = C \cdot \dot{V}_2 = I_2$ comme $I_2 = I_1 - I_3 = \frac{U - V_2}{R_1} - I_3$ avec $V_2 = \frac{x_1}{C}$ et $I_3 = \frac{x_3}{L}$.

Il vient : $\boxed{\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{R_1 \cdot C} - \frac{x_3}{L} + \frac{U}{R_1}}$

$x_2 = C \cdot V_4 \Rightarrow \dot{x}_2 = C \cdot \dot{V}_4 = I_4$ comme $I_4 = I_3 - I_5$ avec $I_3 = \frac{x_3}{L}$ et $I_5 = \frac{V_4}{R_2} = \frac{x_2}{R_2 \cdot C}$.

ce qui donne $\boxed{\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_2 \cdot C} + \frac{x_3}{L}}$

$x_3 = L \cdot I_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = L \cdot \dot{I}_3 = V_3$ comme $V_3 = V_2 - V_4$ avec $V_2 = \frac{x_1}{C}$ et $V_4 = \frac{x_2}{C}$.

Nous aurons $\boxed{\dot{x}_3 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{C}}$

Les matrices d'état sont alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 \cdot C} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{R2C} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad (23)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Les valeurs des composants de ce filtre étant les suivants :

$R_1 = R_2 = 50\,\Omega$, $L = 15\,\mu H$ $C = 3,2\,nF$.

Avec la seconde approche nous obtenons pour l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,25 \cdot 10^6 & 0 & -6,667 \cdot 10^4 \\ 0 & -6,25 \cdot 10^6 & +6,667 \cdot 10^4 \\ +3,125 \cdot 10^8 & -3,125 \cdot 10^8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & +3,125 \cdot 10^8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$