

INTRODUCTION

Le modèle bond graph(BG) associé à un système physique est un intermédiaire qui permet de conduire à l'écriture du modèle mathématique assurant la simulation du susdit système. Cette modélisation pouvant s'opérer à un niveau élémentaire par le chaînage des équations et d'une méthode d'intégration numérique, ou par l'utilisation d'un logiciel de simulation tel Matlab.

Parallèlement à cet aspect de simulation, le bond graph est un outil de représentation qui montre non seulement l'architecture du système mais aussi son organisation causale et permet d'établir des relations formelles les équations d'état.

Dans ce chapitre nous allons étudier les étapes méthodologiques conduisant à l'obtention d'une fonction de transfert ainsi que le schema bloc.

1/ CAUSALITE

La causalité, représentée sur le bond graph à l'aide d'un « trait causal » placé perpendiculairement à la demi flèche, permet la visualisation, au sens schéma - bloc, des relations de « cause à effet », ou « entrée – sortie » ou « donnée – inconnue ». C'est un des avantages majeurs de la technique bond graph pour écrire systématiquement les équations, pour détecter des incohérences dans les équations, pour parcourir le bond graph comme un graphe.

La convention est la suivante : *le trait causal est placé près de l'élément pour lequel l'effort est une donnée, et loin de l'élément pour lequel le flux est une donnée.*

La causalité est une propriété locale. Elle permet d'écrire les équations pour chaque composant comme indiqué sur la figure ci dessous:



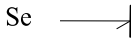

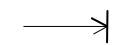



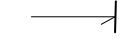
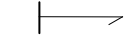
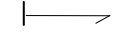
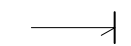
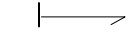

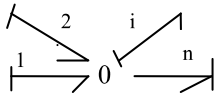
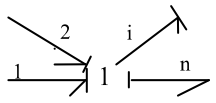
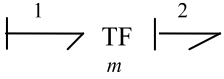
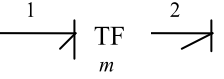
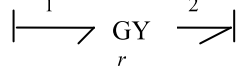
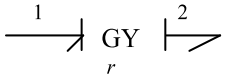
Fig.3.1 Convention de causalite

Le tableau ci dessous regroupe les règles d'affectation de la causalité sur les différents éléments.

La causalité sur les I et C sera si possible intégrale (causalité dite « préférentielle » qui correspond bien à leur propriété de stockage d'énergie). Mais dans certains cas, une causalité

dérivée (non préférentielle) devra être affectée, comme dans le cas de 2 masses couplées à l'aide d'un arbre supposé parfaitement rigide, de deux bobines en série ou de deux condensateurs en parallèle. Ces conditions particulières de causalité sont liées aux hypothèses de modélisation et peuvent amener le modélisateur à revenir sur ses hypothèses de

modélisation.

Causalité	Symbole	Loi générique	
Obligatoire	 Se  Sf  De  Df	e imposé par Se f imposé par Sf Capteur d'effort supposé idéal (lien signal) Capteur de flux supposé idéal (lien signal)	
Intégrale (préférentielle)	 C  I	$e = \psi_C(\int f dt)$ $f = \psi_I(\int e dt)$	
Dérivée (non préférentielle)	 C  I	$f = \psi_C^{-1}(de/dt)$ $e = \psi_I^{-1}(df/dt)$	
Arbitraire (lois linéaires)	 R  R	$e = R.f$ $f = 1/R.e$	
Non arbitraire	 R  R	$e = \psi_R(f)$ $f = \psi_R^{-1}(e)$	
Restrictions de causalité		$e_1 = e_i \quad e_2 = e_i \quad e_n = e_i$ $a_i f_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j f_j$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">1 seul lien avec un trait causal près du 0</div>
		$f_1 = f_i \quad f_2 = f_i \quad f_n = f_i$ $a_i e_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j e_j$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">1 seul lien sans trait causal près du 1</div>
		$e_1 = m.e_2$ $f_2 = m.f_1$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">Affectation symétrique de la causalité pour TF</div>
		$e_2 = 1/m.e_1$ $f_1 = 1/m.f_2$	
	$e_1 = r.f_2$ $e_2 = r.f_1$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;">Affectation anti symétrique de la causalité pour GY</div>	
	$f_1 = 1/r.e_2$ $f_2 = 1/r.e_1$		

2/ CHEMINS CAUSAUX D'UN BOND GRAPH

Le parcours d'un modèle bond graph peut se faire en suivant le transfert de la puissance (à l'aide des « lignes de puissance ») ou en suivant la propagation de la causalité (comme pour les graphes orientés). Chaque lien du bond graph étant porteur de deux variables, e et f , il est possible de parcourir le bond graph en suivant deux chemins, soit en suivant la variable effort soit en suivant la variable flux.

Un chemin causal entre une source et un détecteur est une chaîne d'action (figure 3.2-a) ; un chemin causal fermé entre deux éléments de type R, C, et I permet de définir une boucle causale, qui comprend les deux chemins élémentaires aller et retour (figure 3.2-b) .

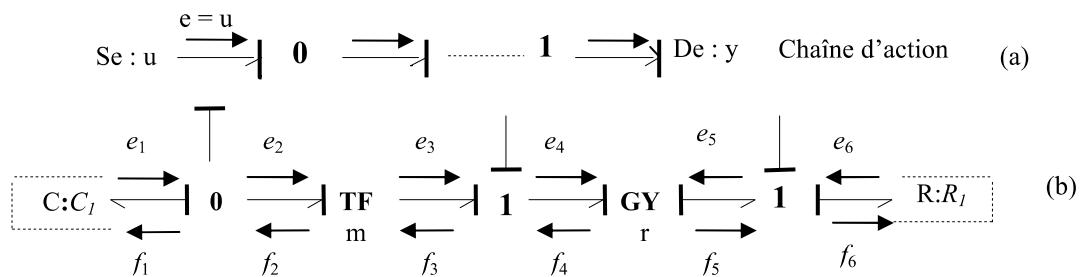


Fig.3.2. Chemin causal et Boucle causale d'un BG

a/ Gain d'un chemin causal et d'une boucle causale

Dans le cas linéaire, les gains d'un chemin causal T_i et d'une boucle causale B_j sont obtenus à l'aide des équations (1)- a et b:

$$T_i = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i m_i^{k_i} \prod_j r_j^{l_j} \quad (1)\text{-a}$$

$$B_j = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i^{k_i})^2 \prod_j (r_j^{l_j})^2 \prod_k g_k \quad (1)\text{-b}$$

Tel que:

- m_i (respectivement r_j) est le module du $i^{\text{ème}}$ TF (respectivement $j^{\text{ème}}$ GY), avec un exposant k_i (respectivement l_j) qui vaut +1 ou -1 suivant la causalité de TF_i (respectivement GY_j). (voir tableau)
- $n_0 + n_1$ est le nombre de changements d'orientation des demi flèches aux jonctions 0 (respectivement 1) quand on suit la variable flux (respectivement effort)
- g_k est le gain (ou transmittance) de l'élément R, C, ou I traversé par le chemin causal ou la boucle causale, qui lui est affectée.

Exemple:

Ainsi, considérons le modèle bond graph figure 3.2-(b). Il y a deux chemins causaux :

$C:C_1 \rightarrow R:R_1$ en suivant les variables $e_1-e_2-e_3-e_4-f_5-f_6$ de gain $T_1 = (-1)^{0+0} (m)^{-1} (r)^{-1}$

$R:R_1 \rightarrow C:C_1$ en suivant les variables $e_6-e_5-f_4-f_3-f_2-f_1$ de gain $T_2 = (-1)^{1+0} (m)^{-1} (r)^{-1}$

Ils définissent une boucle causale entre les éléments $C:C_1$ et $R:R_1$ de gain B_1 :

$$B_1 = (-1)^{1+0} (m)^{-2} (r)^{-2} \left(\frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{C_1 s}\right)$$

Remarque:

Les gains de boucles causales fournissent une estimation des dynamiques du modèle, ce qui peut être utile pour faire de la simplification de modèles sur critères dynamiques ou fixer le pas de calcul pour la simulation.

3. MODELES MATHÉMATIQUES DEDUITS D'UN BOND GRAPH

Les modèles mathématiques déduits directement d'un bond graph sont l'équation d'état dans le cas linéaire ou non linéaire, et la fonction de transfert dans le cas linéaire.

Soit le moteur de la figure ci-dessous:

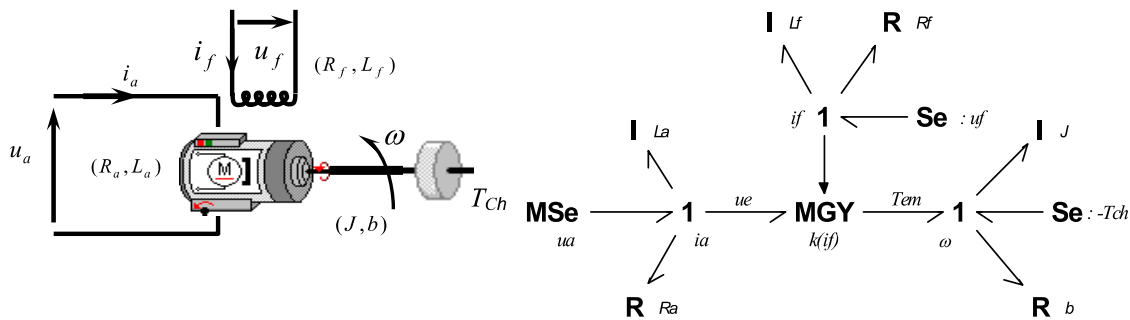


Fig.3.3. Bond Graph d'un MCC

1) Equation différentielle

La causalité permet d'écrire les équations associées à chacun des éléments (voir figure 3.3). Ces équations peuvent être regroupées pour obtenir un modèle global sous forme d'équations différentielles.

Ainsi le moteur peut être modélisé par le système d'équations obtenues en combinant les équations écrites (dans le cas linéaire),

$$\begin{aligned} L\dot{i}_a + R_a i_a + k\omega_1 &= u_a \\ J\dot{\omega}_1 + b\omega_1 + k i_a &= -T_{arb} \end{aligned}$$

2) Equation d'état

Les variables d'état sont les variables d'énergie associées aux éléments dynamiques de stockage d'énergie I et C, soit p pour les I et q sur les C. La dimension du vecteur d'état x est donc égale au nombre d'éléments I et C. Si tous les éléments I et C sont en causalité intégrale préférentielle, toutes les variables d'état sont indépendantes, l'ordre du modèle est égal à la dimension de x et l'équation d'état s'exprime sous forme d'équations différentielles ordinaires (EDO) (équation (3)-(a)) ici dans le cas le plus général où u et d sont respectivement les entrées de commande et de perturbation, et y et z regroupent respectivement les grandeurs à commander et les mesures.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, d) \\ y &= g_y(x, u, d) \\ z &= g_z(x, u, d)\end{aligned}\quad (3)-(a)$$

Si n_D éléments I et C doivent être mis en causalité dérivée, alors les n_D variables d'état correspondantes sont dépendantes des autres, l'ordre du modèle est égal à (dimension de $x - n_D$) et l'équation d'état s'exprime sous forme d'équations algèbro-différentielles (EAD) (équation (3)-(b)).

$$\begin{aligned}\dot{x}_I &= f_I(x_I, x_D, u, d) \\ 0 &= f_D(x_I, x_D, u, d) \\ y &= g_y(x_I, x_D, u, d) \\ z &= g_z(x_I, x_D, u, d)\end{aligned}\quad (3)-(b)$$

L'équation d'état se calcule en exprimant et en combinant les lois de structure (jonctions) et les lois des éléments, compte tenu de leur causalité.

En resumé pour obtenir les équations d'état à partir d'un bond graph les principales étapes sont les suivantes :

1. Affectation à chaque élément C et I d'une composante du vecteur d'état.
2. Ecriture des lois de structure aux jonctions en tenant compte des causalités.
3. Ecriture des lois caractéristiques des éléments en tenant compte des causalités.
4. Résoudre ces différentes relations pour expliciter la dérivée du vecteur d'état.

Ainsi, considérons le modèle bond graph du moteur cc, affecté de la causalité intégrale, comme le montre la figure.3.4.

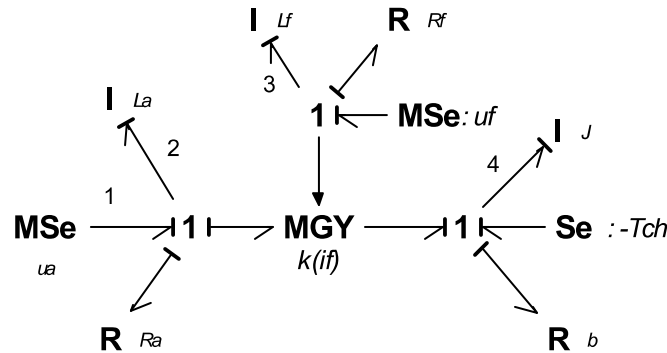


FIG.3.4.BG du MCC en causalite integrale

Le vecteur d'état est de dimension 3, et ses composantes sont les variables d'énergie associées aux éléments I, soit $x^T = [\phi_{La} \ \phi_{Lf} \ h_J]$.

La dérivée du vecteur d'état correspond aux efforts sur les liens associés:

$$\dot{x} = [\dot{\phi}_{La} = u_{La} = e_2 \quad \dot{\phi}_{Lf} = u_{Lf} = e_3 \quad \dot{h}_J = T_J = e_4]^T$$

On peut donc écrire toutes les équations aux jonctions et aux éléments, ce qui conduit à l'équation d'état exprimée dans le cas où les éléments sont linéaires excepté le module du MGY.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{La} \\ \dot{\phi}_{Lf} \\ \dot{h}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} \phi_{La} - k \left(\frac{\phi_{Lf}}{L_f} \right) \frac{h_J}{J} \\ -\frac{R_a}{L_f} \phi_{Lf} \\ -\frac{b}{J} h_J + k \left(\frac{\phi_{Lf}}{L_f} \right) \frac{\phi_{La}}{L_a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_f \\ T_{ch} \end{bmatrix}$$

3) Fonction de transfert

Dans le cas linéaire, l'application de la règle de Mason fournit directement la fonction (ou la matrice de transfert) à partir du calcul des gains de chemins causaux et de boucles causales.

Règle de Mason :

La fonction de transfert entre la variable de sortie y et la variable d'entrée e se calcule à l'aide de l'expression :

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\sum_i T_i(s) D_i(s)}{D(s)}$$

Chap3: Modelisation par les Bond Graphs

avec $D(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots$, où $\sum_i B_i$ correspond à la somme des gains de boucles causales prises

une à une, $\sum_{i,j} B_i B_j$ et $\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$ correspondent aux produits 2 à 2 et 3 à 3 des gains de boucles causales disjointes (sans

jonction en commun ni lien parcouru en suivant la même variable).

$T_i(s)$ est le gain de la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action entre e et y , $D_i(s)$ se calcule comme $D(s)$ quand on a enlevé du bond graph tous les liens et tous les éléments parcourus dans la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.

Ainsi, si on suppose que la tension u_f est constante, et donc que $k(i_f) = k$ est constant, on peut simplifier le modèle en enlevant l'inducteur. Le modèle devient linéaire ; la matrice de transfert du moteur à cc déduite de la figure 3.4 à l'aide de la règle de Mason fait intervenir l'opérateur $1/s$ puisque les éléments I sont en causalité intégrale, soit :

$$Y(s) = \Omega(s) = \frac{1}{D(s)} [N_a(s)U_a(s) - N_m(s)T_{ch}(s)]$$

avec

$$D(s) = 1 - \left(-\frac{R_a}{L_a s} - \frac{b}{Js} - k^2 \frac{1}{L_a J s^2} \right) + \left(-\frac{R_a}{L_a s} \right) \left(-\frac{b}{Js} \right),$$

$$N_a(s) = \frac{1}{L_a s} k \frac{1}{Js} \quad \text{et} \quad N_m(s) = \frac{1}{Js} \left[1 - \left(-\frac{R_a}{L_a s} \right) \right]$$

ou, sous forme canonique :

$$Y(s) = \Omega(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J} \right) s + \left(\frac{k^2}{L_a J} + \frac{R_a b}{L_a J} \right)} \left[\frac{k}{L_a J} U_a(s) - \frac{1}{J} \left(s + \frac{R_a}{L_a} \right) T_{ch}(s) \right]$$