Chapitre I

Concepts fondamentaux

Fonction Maintenabilité

I. 2/ Mesures relatives à un élément réparable

La maintenabilité est la mesure de l'aptitude d'un élément (dispositif, système) à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise dans des conditions spécifiées, lorsque la maintenance de celui-ci est réalisée par des agents qualifiés, utilisant les procédures et les moyens prescrits.

C'est aussi la probabilité pour qu'une opération de maintenance puisse être effectuée pendant un intervalle de temps donné, lorsque la maintenance est assurée dans des conditions données et avec l'utilisation de procédures et de moyens prescrits.

Maintenabilité = Etre rapidement dépanné

Maintenance : Elle désigne l'ensemble des activités destinées à maintenir ou à rétablir un élément (ou un système) dans un état spécifié pour accomplir une fonction requise.

Mathématiquement, on peut écrire :

$$M(t) = \text{Prob}\left\{E \text{ est réparé sur } [0,t]\right\}$$

Si nous notons T' la variable aléatoire qui exprime la durée de réparation, la maintenabilité est la fonction $M(t)$ définie sur :

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1] \text{ telle que :}$$

$$M(t) = \underline{P}\left[T' \leq t\right]$$

Autrement dit $M(t)$ est la fonction de répartition de la v.a. T'

En particulier, on a :

* $M(0) = 0$
* $\lim\limits_{t \to \infty} M(t) = 1$
* $\lim\limits_{t \to \infty} t\left[1 - M(t)\right] = 0$

* $M(t)$ est une fonction non décroissante
* $M(t)$ est dérivable.

Comme pour la variable aléatoire T où nous avons défini sa densité de défaillance $f(t)$, on fait de même pour la variable aléatoire T'.
La densité de réparation $g(t)$ est définie par :

$$g(t) = \frac{dM(t)}{dt}$$

Ainsi, $g(t) \cdot d(t)$ est la probabilité que la réparation soit achevée durant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ sachant que l'élément était défaillant au temps $t = 0$.

I.2.1/ Temps moyen de réparation MTTR

Le MTTR (en anglais : Mean Time To Repair) ou temps moyen de réparation est l'espérance mathématique de T' (la moyenne de T'), il est défini par :

$$MTTR = E(T') = \int_0^\infty t \cdot g(t)\, dt$$

$g(t)$: densité de réparation de T'.

$$MTTR = \int_0^\infty t \cdot \frac{dM(t)}{dt} \cdot dt$$

on peut écrire : $\dfrac{dM(t)}{dt} = M'(t) = -\left[1 - M(t)\right]'$

donc : $MTTR = -\int_0^\infty t \cdot \left[1 - M(t)\right]' dt$

Intégrons par parties ;

on pose : $U = t \longrightarrow dU = dt$

$dv = \left[1 - M(t)\right]' dt \longrightarrow v = 1 - M(t)$

$$MTTR = -\left\{ t\left[1 - M(t)\right]\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[1 - M(t)\right] dt \right\}$$

On a par hypothèse :

$\lim\limits_{t \to \infty} t\left[1 - M(t)\right] = 0$ et $M(0) = 0$

donc :

$$MTTR = -\left\{ \lim_{t\to\infty} t\left[1-M(t)\right] - 0.\left[1-M(0)\right] - \int_0^{\infty}\left[1-M(t)\right]dt \right\}$$

$$= -\left\{ 0 - 0 - \int_0^{\infty}\left[1-M(t)\right]dt \right.$$

$$= \int_0^{\infty}\left[1-M(t)\right]dt$$

$$\boxed{MTTR = \int_0^{\infty}\left[1-M(t)\right]dt}$$

I.2.2/ Taux de réparation $\mu(t)$

On a :

$$M(t) = P\left\{ E \text{ est réparé sur } [0,t] \right\}$$

$$= P\left[T' \leq t\right]$$

En utilisant le théorème des probabilités des événements contraires, on peut écrire :

$$M(t) = P(T' \leq t) = 1 - P(T' > t)$$

T' : variable aléatoire exprimant la durée de réparation

$$P(T' > t) = 1 - P(T' \leq t) = 1 - M(t)$$

Cette probabilité traduit que l'élément E n'est pas réparé sur $[0, t]$.

Le taux de réparation $\mu(t)$ est défini par :

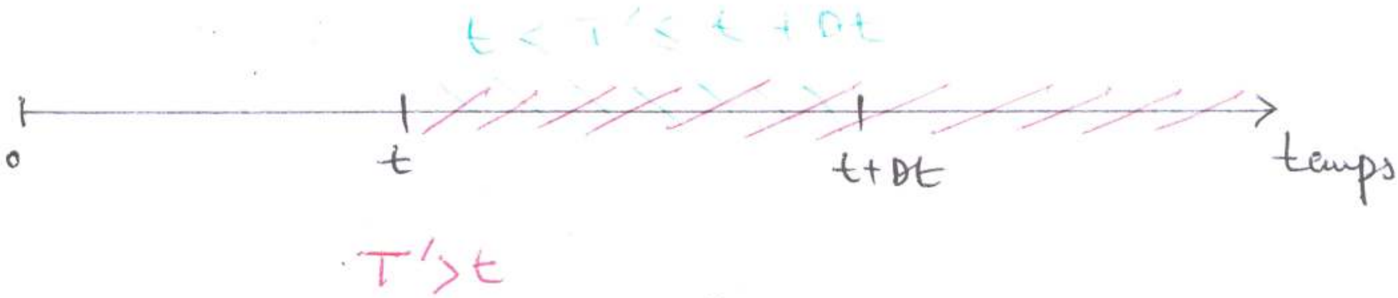
$$\mu(t) = \lim_{Dt \to 0} \frac{1}{Dt} P \left\{ \begin{array}{l} E \text{ réparé } [t, t+Dt] \\ \text{sachant que } E \text{ était} \\ \text{défaillant } [0, t] \end{array} \right\}$$

or :

$$P \left\{ E \text{ réparé } [t, t+Dt] \,/\, E \text{ défaillant } [0,t] \right\}$$

$$= \frac{P \left\{ \left(E \text{ réparé } [t, t+Dt] \right) \cap \left(E \text{ défaillant } [0, t] \right) \right\}}{P \left(E \text{ défaillant } [0, t] \right)}$$

$$= \frac{P \left[\left(t < T' \leq t + Dt \right) \cap \left(T' > t \right) \right]}{P(T' > t)}$$



l'intersection de ces deux évènements donne :

$$(t < T' \leq t + Dt) \cap (T' > t) = t < T' \leq t + Dt$$

Alors :

$$\frac{P\left[(t < T' \leq t + Dt) \cap (T' > t)\right]}{P(T' > t)} = \frac{P(t < T' \leq t + Dt)}{P(T' > t)}$$

$$= \frac{P(0 < T' \leq t + Dt) - P(0 < T' \leq t)}{P(T' > t)}$$

avec :

* $P(0 < T' \leq t + Dt) = M(t + Dt)$
* $P(0 < T' \leq t) = M(t)$
* $P(T' > t) = 1 - M(t)$

Enfin :

$$\mu(t) = \lim_{Dt \to 0} \frac{1}{Dt} \cdot \frac{P(0 < T' < t + Dt) - P(0 < T' \leq t)}{P(T' > t)}$$

$$= \lim_{Dt \to 0} \frac{1}{Dt} \cdot \frac{M(t + Dt) - M(t)}{1 - M(t)}$$

or : $M(t)$ étant dérivable,

Donc :

$$\mu(t) = \frac{1}{1-M(t)} \lim_{D(t)\to 0} \frac{M(t+Dt) - M(t)}{Dt}$$

$$= \frac{1}{1-M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt}$$

$$\boxed{\mu(t) = \frac{1}{1-M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt}}$$

Détermination de la fonction $M(t)$

On a : $\mu(t) = \frac{1}{1-M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt}$

$$\Leftrightarrow \frac{dM(t)}{1-M(t)} = \mu(t)\, dt$$

Intégrons les deux membres de cette équation sur $[0,t]$:

$$\int_0^t \frac{dM(u)}{1-M(u)} = \int_0^t \mu(u)\, du$$

$$- \ln\left|1-M(u)\right|\Big|_0^t = \int_0^t \mu(u)\, du$$

Comme $\left[1-M(u)\right] \geq 0$ car $0 \leq M(t) \leq 1$, $M(0) = 0$

$$-\ln\left[1-M(u)\right]\Big|_0^t = \int_0^t \mu(u)\,du$$

$$\ln\left[1-M(u)\right]\Big|_0^t = -\int_0^t \mu(u)\,du$$

$$\ln\left[1-M(t)\right]-\ln\left[1-M(0)\right] = -\int_0^t \mu(u)\,du$$

$$\ln\left[1-M(t)\right] - 0 = -\int_0^t \mu(u)\,du$$

d'où :

$$1-M(t) = e^{-\int_0^t \mu(u)\,du}$$

et enfin :

$$\boxed{M(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)\,du}}$$

Cas du taux de séparation constant

taux de séparation constant : $\mu(t) = \mu$

$$* \; M(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(u)\,du} = 1 - e^{-\int_0^t \mu\,du} = 1 - e^{-\mu\int_0^t du}$$

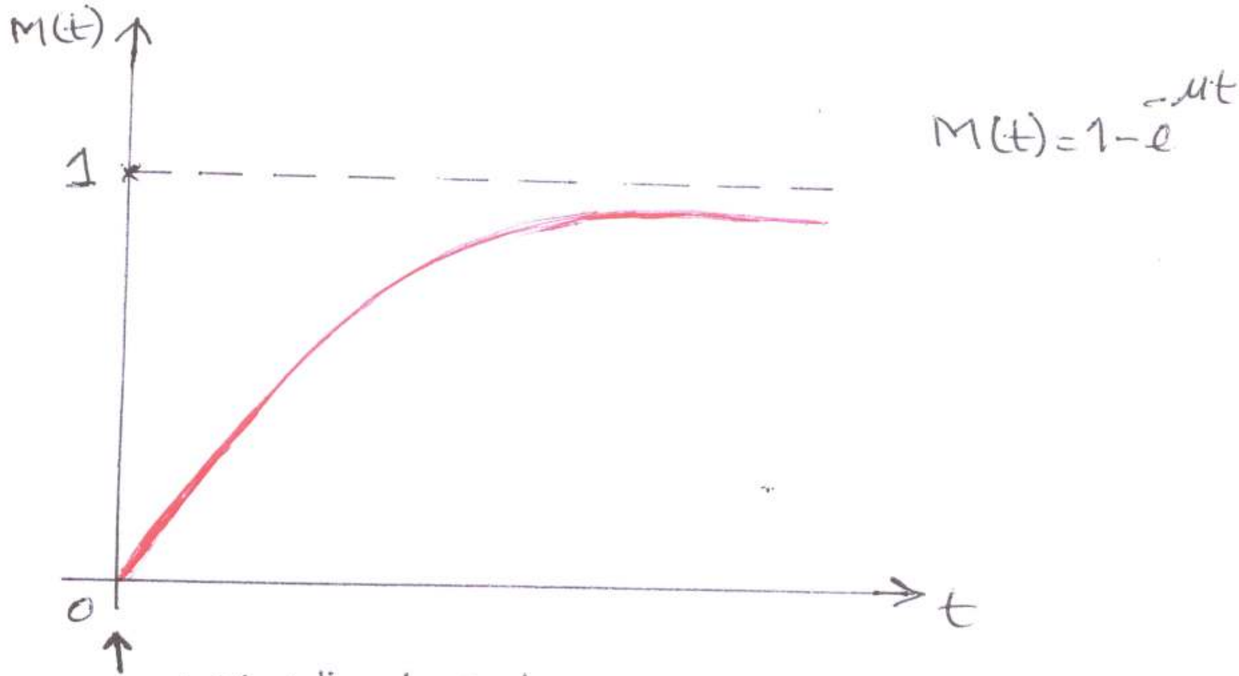
$$= 1 - e^{-\mu t}$$

$$\boxed{M(t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

$$* \quad MTTR = \int_0^\infty [1 - M(t)]\, dt = \int_0^\infty 1 - (1 - e^{-\mu t})\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\, dt = 1/\mu$$

$$\boxed{MTTR = \frac{1}{\mu}}$$



E est défaillant à t = 0

$$* \quad g(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-\mu t})}{dt} = \mu e^{-\mu t}$$

$$\boxed{g(t) = \mu e^{-\mu t}}$$

densité de réparation à μ constant