Chapitre 3

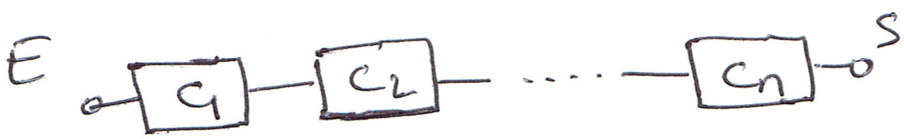
Fiabilité des systèmes non réparables

3.1/ Système à configuration série

Un système S constitué de n composants est dit à configuration série si la défaillance de l'un quelconque des n composants entraîne la défaillance du système. Autrement dit, le système S fonctionne si tous les n composants fonctionnent.

Expression de la fiabilité d'un système à configuration série :

Le diagramme de fiabilité d'un tel système est représenté par la figure suivante :



$C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les composants qui constitue le système à configuration série.

Soit E_i l'événement « le composant i fonctionne à l'instant t ».

La fiabilité $R_s(t)$ du système s'écrit :

$$R_s(t) = \text{Prob}\left[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n\right]$$

Lorsque les événements E_i sont indépendants :

$$R_s(t) = P(E_1) \cdot P(E_2) \dots P(E_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Posons : $r_i(t) = P(E_i)$: fiabilité du composant i

donc : $$\boxed{R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t)} \qquad (1)$$

Si les n composants sont identiques avec une même fiabilité $r(t)$, la formule (1) devient :

$$\boxed{R_s(t) = \left[r(t)\right]^n}$$

Supposons que les taux de défaillance λ_i des composants sont constants. Alors, les fiabilité des n composants suivent la loi exponentielle :

$$\lambda_i = \text{Constante} \iff r_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

La fiabilité du système devient donc :

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdots\cdots e^{-\lambda_n t}$$

$$= e^{-(\lambda_1 t + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_n t)}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) t}$$

$$\boxed{R_S(t) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) t}}$$

- Le taux de défaillance λ_S du système est :

$$\boxed{\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

d'où : $$\boxed{R_S(t) = e^{-\lambda_S t}}$$

Nous remarquons bien que si les fiabilités des composants d'un système série sont régit par une loi exponentielle, alors, la fiabilité du système est aussi régit par une loi exponentielle

- le $MTTF_S$ du système est :

$$\boxed{MTTF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}}$$

Si tous les composants ont le même taux de défaillance λ, le $MTTF_S$ sera :

$$MTTF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\underbrace{\lambda+\lambda+\dots+\lambda}_{n \text{ fois}}} = \frac{1}{n\lambda}$$

$$\boxed{MTTF_S = \frac{1}{n\lambda}}$$

de même : $\boxed{\lambda_S = n.\lambda}$ et $\boxed{R_S(t) = e^{-n\lambda t}}$

Remarques :

1) $R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t)$ (fiabilité d'un système à configuration série)

Comme $r_i(t)$ est comprise entre 0 et 1, nous pouvons conclure facilement que pour un tel système la fiabilité $R_S(t)$ est inférieure à la fiabilité $r_i(t)$ du composant le moins fiable (càd le composant i qui a la plus faible valeur de fiabilité). $R_S(t) < \min[r_i(t)]$

2) Le MTTF d'un composant de taux de défaillance λ est : $MTTF_C = \frac{1}{\lambda}$

Si nous comparons ~~le~~ le MTTFc et le MTTFs d'un système série de n composants identiques, on aura :

$$\boxed{MTTF_s = \frac{1}{n\lambda} = \frac{MTTF_c}{n}}$$

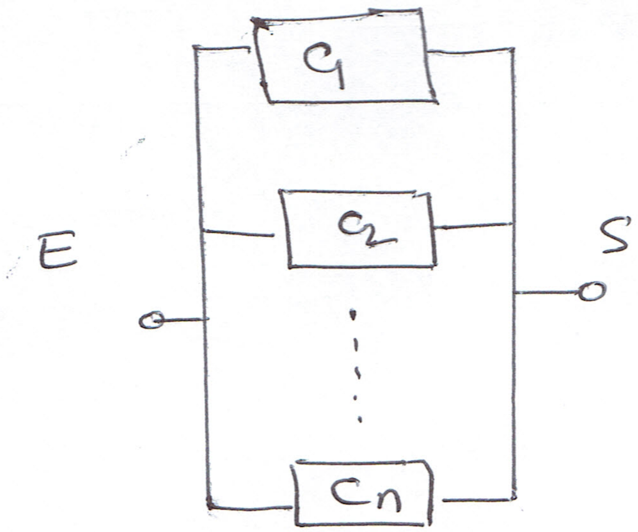
Nous remarquons que le MTTFs est n fois plus faible que le MTTFc.

En tenant compte de ces 2 remarques, on peut dire que le système à configuration série est qualifié de système fragile.

3.2/ Système à configuration parallèle

Un système S composé de n composants est dit à configuration parallèle si la panne de tous les composants est nécessaire pour entraîner la panne du système. Autrement dit, le système S fonctionne si un seul composant fonctionne. Dans une telle configuration, les n composants fonctionnent simultanément.

Le diagramme de fiabilité d'un système parallèle composé de n composants est représenté par la figure suivante :



Expression de la fiabilité

Soit l'événement E_i « le composant i fonctionne à l'instant t ».

$$R_S(t) = \text{Prob}\left(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n\right) \quad (2)$$

Considérons les événements contraires des événements E_i. Soit $\overline{E}_i$ l'événement « le composant i est défaillant à l'instant t ».

$$P(E_i) = 1 - P(\overline{E}_i) \quad (3)$$

Appliquons cette propriété (relation 3) à la relation (2) :

$$R_s(t) = 1 - P\left(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \ldots \cap \overline{E}_n\right)$$

Lorsque les événements $\overline{E}_i$ sont indépendants :

$$R_s(t) = 1 - \left[P(\overline{E}_1) \cdot P(\overline{E}_2) \ldots P(\overline{E}_n)\right]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{E}_i)$$

Par application de nouveau de la relation (3) :

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P(E_i)\right]$$

Posons : $r_i(t) = P(E_i)$: Probabilité que le composant i fonctionne.

d'où :

$$\boxed{R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - r_i(t)\right]}$$

On peut montrer facilement que la fiabilité d'un système parallèle est supérieure à celle du composant le plus fiable.

$$R_s(t) = \max\left[r_i(t)\right]$$

- Cas des composants à taux de défaillance constant :

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = c^{te}$$

$$r_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

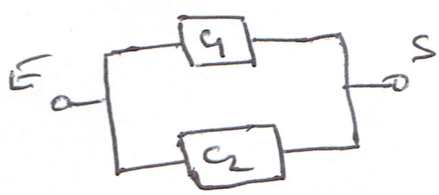
$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)$$

- Si tous les composants ont le même taux de défaillance λ :

$$\boxed{\begin{aligned} R_s(t) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n \end{aligned}}$$

<u>Application</u> :

1) Calculons la fiabilité d'un système composé de deux composants identiques qui ont un taux de défaillance λ constant :



$C_1 \equiv C_2 \equiv C$ identique.

$$r(t) = e^{-\lambda t}$$

$$R_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 = 1 - \left(1 + e^{-2\lambda t} - 2e^{-\lambda t}\right)$$

$$= 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

Application numérique

On donne λ du composant égale à $3.10^{-3}\,h^{-1}$

$$r(t) = e^{-\lambda t} = e^{-3.10^{-3}t}$$

Prenons : $t = 1000\,h$

1) Calculons $r(1000)$: $r(1000) = e^{-3.10^{-3}.10^{3}} = e^{-3}$

$$= 0,049787$$

2) Calculons $R_S(1000)$:

$$R_S(1000) = 2e^{-3.10^{-3}.10^{3}} - e^{-2.3.10^{-3}.10^{3}}$$

$$= 2e^{-3} - e^{-6} = 0,097095$$

3) Calculons $MTTF_C$: $MTTF_C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3.10^{-3}} = \frac{10^{3}}{3}$

$$= 333,334 \text{ heures}$$

4) Calculons $MTTF_S$:

$$MTTF_S = \int_0^{\infty} R_S(t)\,dt = \int_0^{\infty} \left(2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right) dt$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t}\,dt$$

$$= \frac{2}{-\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-2\lambda} e^{-2\lambda t}\Big|_0^{\infty}$$

$$MTTF_s = -\frac{2}{\lambda}(0-1) + \frac{1}{2\lambda}(0-1)$$

$$= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{4}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{4-1}{2\lambda}$$

$$= \frac{3}{2\lambda}$$

$$MTTF_S = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}.10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ heures}$$

Conclusions :

1) On remarque que la fiabilité $R_s(t)$ est pratiquement le double de la fiabilité $r(t)$ du composant :

$$\frac{R_s(t)}{r(t)} = \frac{0,097095}{0,049787} = 1,95$$

2) La $MTTF_S$ est augmenté de 50 % par rapport à la $MTTF_c$.

($MTTF_s = 1,5 \times MTTF_c$)

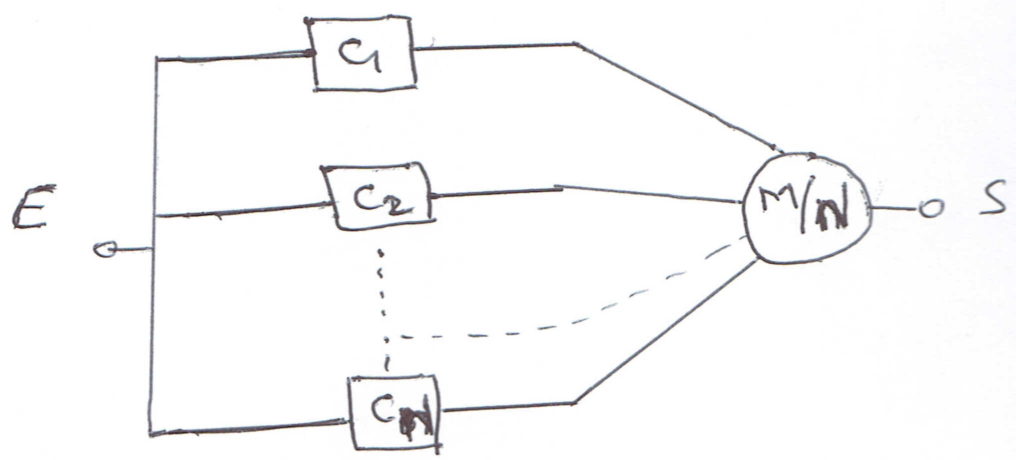
3) A travers ces calculs, on montre bien que la fiabilité du système parallèle est supérieure à celle du composant.

3.3/ système à configuration MOON

MOON : • M composants parmi N
ou
• M out-of N

Dans cette configuration, le système fonctionne si au moins M composants parmi les N fonctionnent.

Le diagramme de fiabilité d'un système à configuration MOON est représenté par la figure ci-dessous :



Expression de la fiabilité

$R(t)$ = Prob [au moins M composant parmi N fonctionnent]

Considérons que les N composants sont identiques. La fiabilité d'un tel système suit la loi binomiale de paramètres [N et $r(t)$]

N : le nombre de composants qui constituent le système S.

M : le nombre de composants en fonctionnement

r(t) : fiabilité d'un composant.

donc :

$$\boxed{R_s(t) = \sum_{k=M}^{N} C_N^k \left[r(t)\right]^k \left[1-r(t)\right]^{N-k}}$$

avec : $C_N^k = \dfrac{N!}{k!\,(N-k)!}$

<u>Cas de la configuration 2oo3</u>

ici : M=2 et N=3

$$R_s(t) = \sum_{k=2}^{3} C_3^k \left[r(t)\right]^k \left[1-r(t)\right]^{3-k}$$

$$= C_3^2 \left[r(t)\right]^2 \left[1-r(t)\right]^{3-2} + C_3^3 \left[r(t)\right]^3 \left[1-r(t)\right]^{3-3}$$

$$= 3\,r^2(t)\left[1-r(t)\right] + 1 \cdot r^3(t) \cdot 1$$

$$= 3r^2(t) - 3r^3(t) + r^3(t) = 3r^2(t) - 2r^3(t)$$

donc : $$\boxed{R_s(t) = 3r^2(t) - 2r^3(t)}$$