Chapitre I | Concepts fondamentaux

Fonction fiabilité

I.1 / Mesures relatives à un élément non réparable

I.1.1 / Fonction de fiabilité et fonction de défaillance d'un élément non réparable :

a) Fonction de fiabilité : (En anglais : Reliability)

Définition : La fiabilité est l'aptitude d'un élément à accomplir une fonction requise dans des conditions d'utilisation spécifiées pendant une période de temps donnée.

Mathématiquement, elle définie par :

$$R(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 1]$$

notation : $R(t)$ pour fiabilité

$$R(t) = \text{Prob}\{E \text{ non défaillant sur } [0,t]\}$$

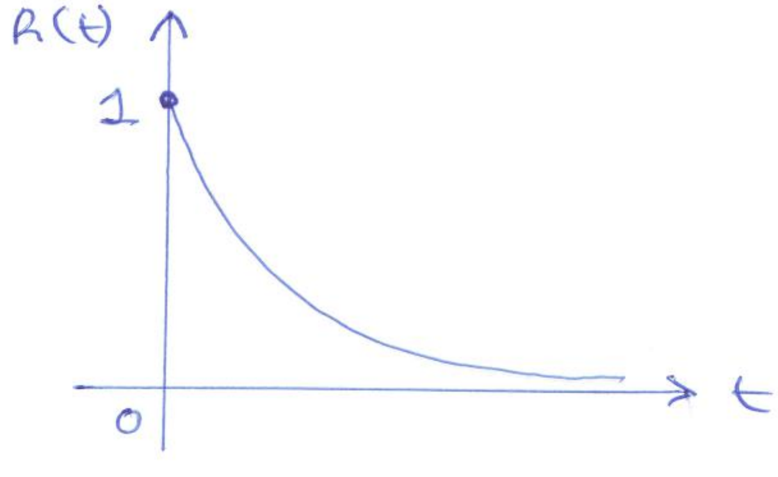
Propriétés

* $R(0) = 1$: exprime le fait que l'élément E fonctionne au temps $t = 0$

* $\lim\limits_{t \to \infty} R(t) = 0$: montre que l'élément n'a pas une durée de vie infinie.

* $R(t)$ est une fonction non croissante définie sur $[0, +\infty[$ et variant entre 0 et 1.

* $R(t)$ se mesure par la probabilité que l'élément E puisse accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.



Si T représente la variable aléatoire qui exprime la durée de vie d'un élément E, alors :

$$R(t) = P[T > t]$$

Le nombre $R(t)$ représente la probabilité que l'élément E n'ait pas de défaillance avant l'instant t.

b) Fonction de défaillance

On appelle fonction de défaillance (ou fonction de répartition) la fonction F définie par :

$$F(t) = P\left[T \leq t\right] = \int_0^t f(t)\,dt$$

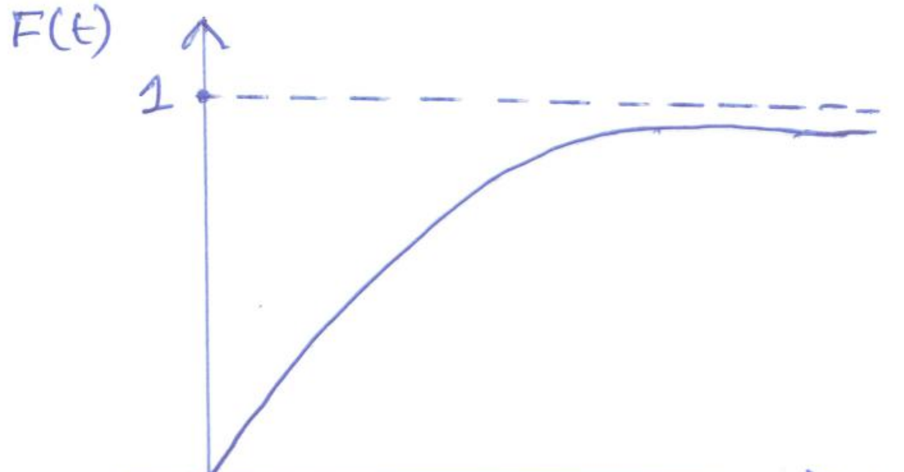
F(t) : Fonction de défaillance

f(t) : densité de défaillance (ou de probabilité)

Aussi : $F(t) = 1 - R(t) = 1 - P\left[T > t\right]$

R(t) et F(t) sont deux fonctions complémentaires

F(t) représente la probabilité que l'élément E ait une défaillance avant l'instant t.



Si la fonction de défaillance $F(t)$ admet une densité de défaillance $f(t)$, on peut écrire alors :

$$f(t) = F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d[1-R(t)]}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

I.1.2/ Taux de défaillance $\lambda(t)$

a) Taux moyen de défaillance

Le taux moyen de défaillance de l'élément E entre les instants t et $t+Dt$ est la fonction $\lambda_M(t)$ définie par :

$$\lambda_M(t) = \frac{1}{Dt} \operatorname{Prob}\left\{ \begin{array}{l} \text{la première défaillance de E a lieu} \\ \text{sur l'intervalle } [t, t+Dt] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{Dt} \operatorname{Prob}\left\{ \begin{array}{l} \text{E tombe en panne sur } [t, t+Dt] \text{ sachant} \\ \text{que E a bien fonctionné sur } [0, t] \end{array} \right\}$$

L'expression entre accolade est traduite par :

$P\left[t < T \leq t + Dt \;/\; T \geq t\right]$ ce qui exprime une probabilité conditionnelle

En tenant compte du théorème des probabilités conditionnelles, on peut écrire : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P\left[(t < T \leq t+Dt) \mid T > t\right] = \frac{P\left[(t < T \leq t+Dt) \cap (T > t)\right]}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(t < T \leq t+Dt)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(0 < T \leq t+Dt) - P(0 < T \leq t)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{F(t+Dt) - F(t)}{R(t)} = \frac{\left[1 - R(t+Dt)\right] - \left[1 - R(t)\right]}{R(t)}$$

$$= \frac{R(t) - R(t+Dt)}{R(t)}$$

Donc :

$$\lambda_M(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{R(t) - R(t+Dt)}{R(t)}$$

$$= -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{R(t+Dt) - R(t)}{Dt}$$

b) Taux instantané de défaillance

On dit taux instantané de défaillance ou tout simplement taux de défaillance $\lambda(t)$.

Le taux instantanée de défaillance est défini :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \lambda_M(t)$$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[- \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= - \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t}$$

$$= - \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$$

$$\boxed{\lambda(t) = - \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}}$$

I.1.3/ Expression de la fiabilité en fonction du taux de défaillance $\lambda(t)$

Soit T une variable aléatoire continue qui désigne le temps de bon fonctionnement d'un élément ou sa durée de vie avant une défaillance.

Pour simplifier, on choisit $t=0$ comme origine des temps lorsque l'élément est mis en marche pour la première fois.

On a : $$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dR(t)}{R(t)} = -\lambda(t)\, dt \quad \text{-----} (1)$$

Intégrons les 2 membres de l'équation (1) sur l'intervalle $[0, t]$:

$$\int_0^t \frac{dR(u)}{R(u)} = -\int_0^t \lambda(u)\, du$$

$$\ln |R(u)| \Big|_0^t = -\int_0^t \lambda(u)\, du$$

$$\ln R(u) \Big|_0^t = -\int_0^t \lambda(u)\, du \quad , 0 \leq R(u) \leq 1 \text{ (positive)}$$

$$\left[\ln R(t) - \ln R(0)\right] = -\int_0^t \lambda(u)\, du$$

$$\ln \frac{R(t)}{R(0)} = -\int_0^t \lambda(u)\, du$$

$$e^{\ln \frac{R(t)}{R(0)}} = e^{-\int_0^t \lambda(u)\, du}$$

$$\frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

donc : $$R(t) = R(0)\, e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

$R(0) = 1$: fiabilité d'un élément neuf.

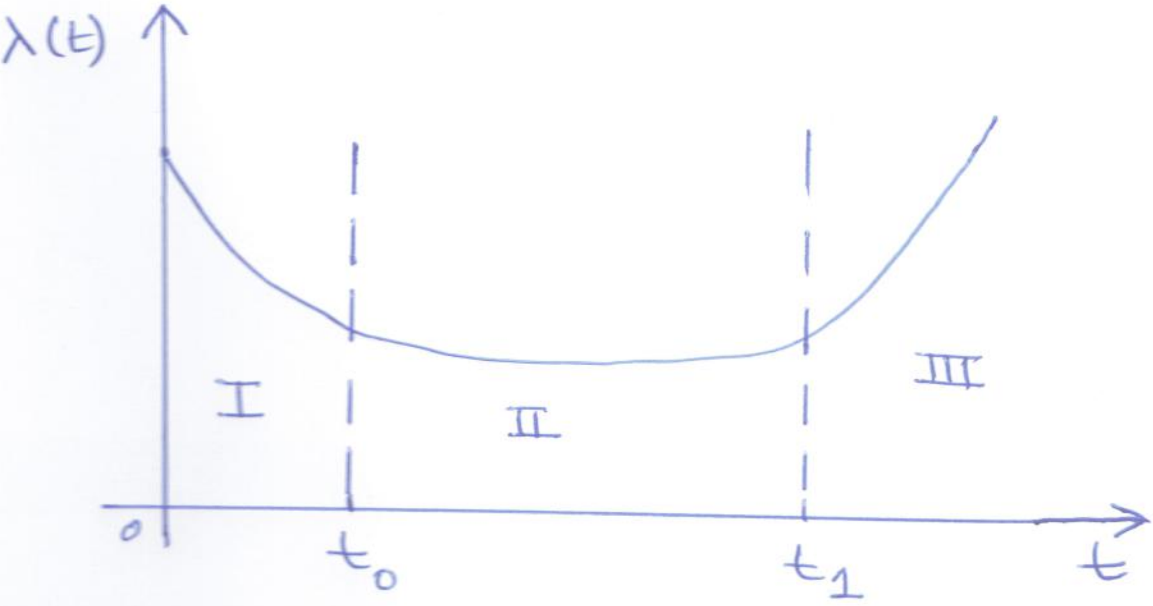
d'où : $$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}}$$

Aussi : $$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$\boxed{f(t) = \lambda(t) \cdot R(t) = \lambda(t) \cdot e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}}$$

I.1.4/ Modèle d'évolution du taux de défaillance d'un élément

Des études statistiques du taux de défaillance $\lambda(t)$ de nombreux éléments, que se soient des éléments mécaniques, électriques, électroniques ...., ont montré que ces éléments ~~ont taux de défaillance~~ ont un taux de défaillance qui prend pratiquement la forme suivante :



La forme de cette courbe est dite « courbe en baignoire ». Cette courbe présente trois régions ou zones distincts :

* La région I $(0 < t < t_0)$

Cette région définit la période des défaillances de jeunesse de l'élément au cours de laquelle le taux de défaillance décroît rapidement. Dans cette zone, les défaillances surviennent au début de la vie de l'élément. Elles correspondent aux défauts de fabrication, de conception, ... Cette période est aussi appelée période de rôdage.

* La région II ($t_0 < t < t_1$)

Elle définit la zone de vie utile (useful life) de l'élément pendant laquelle le taux de défaillance est sensiblement constant.
Les défaillances survenant pendant cette période sont dites catalectiques ou aléatoires.

* La région III ($t > t_1$)

Cette région définit la période des défaillances d'usure ou de vieillissement pendant laquelle le taux de défaillance croît rapidement.
Ces défaillances sont dues à des ~~processus~~ processus de détérioration, de corrosion, de fatigue, ...

I.1.5/ Cas du taux de défaillance constant

Dans la phase de vie utile de l'élément, le taux de défaillance est constant, alors:

$$\lambda(t) = \lambda = C^{te}$$

L'expression de la fonction fiabilité $R(t)$ devient donc :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du} = e^{-\lambda \int_0^t du}$$

$$= e^{-\lambda [u|_0^t]} = e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}}$$

Selon ce résultat, on dit que pendant cette période de vie utile, la fonction fiabilité $R(t)$ suit une loi exponentielle.

. La fonction de défaillance $F(t)$ s'écrit :

$$\boxed{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

. La densité de défaillance $f(t)$ est :

$$\boxed{f(t) = \lambda(t) \cdot R(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

Si le taux de défaillance est constant, la fiabilité suit une loi exponentielle.

I.1.6 / Temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance (MTTF)

Le temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance, usuellement noté MTTF (en anglais : Mean Time To Failure) n'est autre que la valeur moyenne de la variable aléatoire T (espérance mathématique) :

$$MTTF = E(T) = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t \left[- \frac{dR(t)}{dt}\right] dt = -\int_0^\infty t \cdot \frac{dR(t)}{dt} \cdot dt$$

Intégrons par parties[1] cette intégrale :

<u>Posons :</u> $u = t \Longrightarrow du = dt$

$$dv = \frac{dR(t)}{dt} \cdot dt = dR(t)$$

$$\Longrightarrow v = R(t)$$

(1) $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

$$MTTF = -\left[t.R(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} R(t)\,dt \right]$$

$$= -t.R(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t)\,dt$$

- Pour $t = 0$, $R(0) = 1$ (propriété de $R(t)$)

  donc : $t.R(t) = 0 \times 1 = 0$

- Pour $t \to \infty$: $R(t)$ tend rapidement vers 0 avant que t tend vers l'infini

  donc : $t.R(t) \longrightarrow 0$ qd $t \to \infty$

d'où : $$\boxed{MTTF = \int_0^{\infty} R(t)\,dt}$$

Cas où $\lambda(t) = \lambda = c^{\underline{\underline{te}}}$:

On a : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}$$

$$\boxed{= 1/\lambda}$$