Chapitre 5 : Les Opérateurs de Fredholm

Dans tout ce chapitre, E, F et G désignerons trois espaces de Banach de dimension infinies sur le même corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

§ 1. Rappels.

(•) Si X est un espace vectoriel, on note par $\dim X$, la dimension de cette espace X; plus précisement, si X possède une base finie B, alors $\dim X$ est égale au nombre de vecteurs que contient B, et si X possède une base infinie, on pose $\dim X = \infty$.

(•) Si X est un espace normé, on note par X' son dual topologique : l'ensemble des formes linéaires bornées sur X.

Notation 1. Soit $M \subset E$, $N \subset E'$ (non vides).

(i) L'orthogonal de M, noté $M^\perp$, est le sous-ensemble de E' donné par :

$$M^\perp = \{f \in E' : \forall x \in M, f(x) = 0\},$$

(ii) L'orthogonal de N, noté ${}^{\perp}N$, est le sous-ensemble de E donné par :

$${}^{\perp}N = \{x \in E, \forall f \in N, f(x) = 0\}.$$

<u>Proposition 2</u>. Si M est une partie non vide de E, et N une partie non vide de E', on a alors :

(i) $M^{\perp}$ est un sous-espace de E'.

(ii) ${}^{\perp}N$ est un sous-espace de E.

<u>Proposition 3</u>. Soit $T \in B(E, F)$. Alors on a les deux propriétés suivantes :

(i) $R(T)$ est fermé si et seulement si $R(T')$ l'est aussi.

(ii) Si $R(T)$ est fermé, alors : $R(T') = (\ker T)^{\perp}$ et $R(T) = {}^{\perp}(\ker T')$.

<u>Notation 2</u>. Soit X un espace vectoriel, et M un sous-espace vectoriel de X.

On note note par codim M, la dimension de l'espace vectoriel quotient X/M : appelée la codimension de M.

<u>Proposition 4</u>. Soit X un espace vectoriel, et M un sous-espace vectoriel de X. Alors la dimension de tout supplémentaire algébrique de M dans X est égale à la codimension de M.

<u>Notation 3</u>. Soit $T \in B(E,F)$ à image fermée.

On note par :

$$\begin{cases} \alpha(T) = \dim \ker T, \\ \beta(T) = \operatorname{codim} R(T). \end{cases}$$

<u>Proposition 5</u> (Formules de dualités).

Soit $T(E,F)$ à image fermée.

On a alors les formules suivantes :

(i) $\alpha(T) = \beta(T')$, (ii) $\alpha(T') = \beta(T)$,

(iii) $\alpha(T) = \alpha(T'')$, (iv) $\beta(T) = \beta(T'')$.

<u>Proposition 6:</u> Soit $T \in B(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

On a alors :

(i) T est compact si et seulemsent si, T' l'est aussi.

(ii) Si $E = F$, et T compact, alors $\dim \ker(T - \lambda I) = \dim \ker(T' - \lambda I)$.

<u>Proposition 7.</u> Soit $T \in B(E,F)$.

Si $\operatorname{codim} R(T) < \infty$, alors $R(T)$ est fermé.

§2. <u>Les Opérateurs Semi-Fredholm.</u>

<u>Définition 1:</u> Soit $T \in B(E,F)$.

T est appelé un opérateur semi-~~Fredh.~~ Fredholm, si :

(i) $R(T)$ fermé et $\alpha(T) < \infty$,

ou bien,

(ii) $R(T)$ fermé et $\beta(T) < \infty$.

<u>Remarque 1.</u> Soit $T \in B(E,F)$.

(1) En utilisant la Proposition 7 de la section 1, alors T satisfait la condition (ii) de la Définition (1) si et seulement si, $\beta(T) < \infty$.

(2) Si T vérifie la condition (i) de la Définition 1, alors il existe un sous-espace E_1 de E tel que $E = \ker T \oplus E_1$ est une S.D.T.

(3) Si T vérifie la condition (ii) de la Définition 1, alors il existe un sous-espace F_1 de F tel que $F = R(T) \oplus F_1$ est une S.D.T avec $\dim F_1 < \infty$.

<u>Notation 1.</u> On note par:

(i) $\Phi_+(E,F) = \{T \in B(E,F) : R(T) \text{ fermé}, \alpha(T) < \infty\}$

(ii) $\Phi_-(E,F) = \{T \in B(E,F) : R(T) \text{ fermé}, \beta(T) < \infty\}$

On pose $\Phi_+(E,E) = \Phi_+(E)$, et $\Phi_-(E,E) = \Phi_-(E)$.

<u>Définition 2</u>. Soit $T \in B(E,F)$.

(i) T est dit Fredholm $+$, si $T \in \Phi_+(E,F)$,

(ii) T est dit Fredholm $-$, si $T \in \Phi_-(E,F)$.

<u>Proposition 1</u> (Formules de dualités).

Soit $T \in B(E,F)$. Alors on a les deux équivalences suivantes:

(i) $[T \in \Phi_+(E,F)] \Longleftrightarrow [T' \in \Phi_-(F',E')]$,

(ii) $[T \in \Phi_-(E,F)] \Longleftrightarrow [T' \in \Phi_+(F',E')]$.

<u>Preuve</u>: La preuve découle directement des deux propositions (3) et (5) de la Section 1.

<u>Notation 2</u>. Si T est un opérateur Semi-Fredholm de $B(E,F)$, on note par:

$i(T) = \beta(T) - \alpha(T)$ (avec la convention $\infty - n = \infty$ et $n - \infty = -\infty$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$; $i(T)$ est appelé, l'indice de T.

<u>Remarque 2.</u> ① Si T est un opérateur semi-Fredholm de $B(E,F)$, alors $i(T) \in \overline{\mathbb{Z}}$ (où $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$)

② Si $T \in B(E,F)$ à image fermée, alors on a les équivalences suivantes :

(i). $[T \in \Phi_+(E,F) - \Phi_-(E,F)] \Leftrightarrow [i(T) = +\infty]$,

(ii) $[T \in \Phi_-(E,F) - \Phi_+(E,F)] \Leftrightarrow [i(T) = -\infty]$.

(iii) $[T \in \Phi_+(E,F) \cap \Phi_-(E,F)] \Leftrightarrow [i(T) \in \mathbb{Z}]$.

<u>Exemples:</u>

(1) L'opéreteur nul 0 de $B(E,F)$ n'est pas semi-Fredholm (à vérifier).

(2) Tout opérateur inversible de $B(E,F)$ est semi-Fredholm $+$ et semi-Fredholm $-$ à la fois (à vérifier) d'indice 0.

(3) Soit K un compact de $B(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Alors $K - \lambda I \in \Phi_+(E) \cap \Phi_-(E)$, et de plus, $i(K - \lambda I) = 0$.

En effet, on a :

d'après le Chapitre 3, $R(K-\lambda I)$ est fermé et $\alpha(K-\lambda I)<\infty$,

et d'autre part, en utilisant les formules de dualité de la section 1 :

$\beta(K-\lambda I) = \alpha(K-\lambda I)' = \alpha(K'-\lambda I)$.

En appliquant la Proposition 6 de la section 1, on a alors $\beta(K-\lambda I) = \alpha(K'-\lambda I) = \alpha(K-\lambda I) < \infty$

Ceci prouve que $K-\lambda I \in \Phi_+(E,F) \cap \Phi_-(E,F)$ et $i(K-\lambda I) = 0$.

<u>Remarque 2.</u> Si X est un Banach, alors la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si $\dim X < \infty$.

<u>Lemme 1.</u> Soit M et N deux sous-espaces de E tels que $E = M \oplus N$. Alors il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant :

pour tout $x \in E$ (avec $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in M$ et $x_2 \in N$) on a :

$\|x_1\| \leq \alpha \|x\|$ et $\|x_2\| \leq \beta \|x\|$.

<u>Preuve:</u> On suppose que la somme directe $E = M \oplus N$ est non triviale (i.e. M et N diffèrent de $\{0\}$ et E).

Comme cette somme directe est topologique (voir Chapitre 1), alors la projection P de E sur M parallèlement à N est linéaire bornée et $P \neq 0$ et $P \neq I$.

Soit $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in M$ et $x_2 \in N$.

Donc $Px = x_1$ et $(I-P)x = x_2$

On a alors :

$$\begin{cases} \|x_1\| = \|Px\| \leq \|P\| . \|x\| , \\ \|x_2\| = \|(I-P)x\| \leq \|I-P\| . \|x\| . \end{cases}$$

Il suffit de prendre $\alpha = \|P\|$, et $\beta = \|I-P\|$.

Il est clair que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

<u>Proposition 2.</u> Soit $T \in B(E,F)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \Phi_+(E,F)$,

(ii) pour tout partie bornée M de E, si M est non relativement compacte, alors $T(M)$ est non relativement compacte.

<u>Preuve</u>: $(ii) \Longrightarrow (i)$? Supposons (ii) vraie.

Montrons (i) ?

(a) $\alpha(T) < \infty$? Par l'absurde supposons $\alpha(T) = \infty$

Soit B la boule unité fermée de $\ker T$.

Comme $\ker T$ est un Banach de dimension infinie, alors B est non compacte (Remarque 2).

Donc B est non relativement compacte (car B fermée). D'après (ii), $T(B)$ est aussi non relativement compacte. Ceci contredit, $T(B) = \{0\}$ (car $B \subset \ker T$).

Par conséquent $\alpha(T) < \infty$.