~~Ce qui est impossible, donc $\mathcal{L}(T)$ ...~~

(b) $R(T)$ fermé ?

D'après (a), $\ker T$ est de dimension finie,

alors il existe un sous-espace E_1 de E t.q.

$E = \ker T \oplus E_1$ est une S.D.T.

Soit l'opérateur : $\left[\hat{T} : E_1 \longrightarrow F, x \longmapsto \hat{T}x = Tx\right]$.

$\hat{T}$ agit donc entre deux Banach E_1 et F.

De plus, $R(\hat{T}) = R(T)$.

$\hat{T}$ est linéaire borné injectif. (à vérifier).

Donc si $\hat{T}$ est minoré, alors il est à image fermée, autrement, $R(T)$ fermé.

Supposons par l'absurde que $\hat{T}$ non minoré.

Il existe alors une suite normée $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dans E_1

telle que $Tx_n \longrightarrow 0$.

Donc l'ensemble $\{x_n : n \geq 1\}$ est relativement compacte.

(d'après (ii)).

Il existe alors une sous-suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de $\{x_n\}_{n\geq 1}$

et il existe $u \in E_1$ t.q. $u_n \longrightarrow u$. (*).

T étant continue, donc $Tu_n \longrightarrow Tu = 0$.

~~Alors Tu = 0~~ D'où $u \in E_1 \cap \ker T$.

Donc $u = 0$.

D'autre part, comme $\|u_n\| = 1$, pour tout $n \geq 1$,

et $u_n \longrightarrow u$, donc $\|u\| = 1$.

Ce qui est en contradiction avec $u = 0$.

Par conséquent, $R(T)$ fermé.

On a donc $T \in \Phi_+(E, F)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$? Supposons (i) vraie. Montrons (ii)?

On a donc $\ker T$ est dimension finie et $R(T)$ fermé.

Il existe alors un sous-espace E_1 de E t.q.

$E = \ker T \oplus E_1$ est une S.D.T.

Soit l'opérateur $[\tilde{T} : E_1 \longrightarrow R(T), x \longmapsto \tilde{T}x = Tx]$.

$\tilde{T}$ est linéaire borné bijectif (à vérifier)

agissant entre 2 Banach, donc $\tilde{T}$ est inversible.

Montrons maintenant (ii).

Soit M une partie bornée de E, non relat. comp.

Il suffit de montrer que $T(M)$ est aussi

non relat. comp.

Par l'absurde, supposons que $T(M)$ relativ. compacte
M étant non relat. comp., alors M possède une
suite $(x_n)_{n\geq 1}$ sans sous-suite convergente.
Pour chaque $n \geq 1$, posons $x_n = u_n + v_n$, où $u_n \in \ker T, v_n \in E_1$.
Suivant la S.D.T. $E = \ker T \oplus E_1$, il existe
deux constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vérifiant (Lemme 1)
$\forall n \geq 1$, ~~$x_n = u_n + v_n$~~ $\|u_n\| \leq \alpha \|x_n\|, \|v_n\| \leq \beta \|x_n\|$
La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ étant bornée, donc la suite
$(u_n)_{n\geq 1}$ l'est aussi, et comme $\dim \ker T < \infty$,
alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite
$(u_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ convergente. Posons $u = \lim u_{\varphi(n)}$ $(u \in \ker T)$
De plus on a, $Tx_{\varphi(n)} = \tilde{T} v_{\varphi(n)} = T v_{\varphi(n)}$, pour $n \geq$
$T(M)$ étant relativement compacte, donc
la suite $(Tx_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ $\left(= (\tilde{T} v_{\varphi(n)})_{n\geq 1}\right)$
possède une sous-suite $(\tilde{T} v_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ convergente.
$\tilde{T}$ étant inversible, donc la suite $(v_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$
est ~~convergente~~ de Cauchy dans le

Banach E_1, donc elle est convergente.

Posons $v = \lim v_{\varphi(\psi(n))}$ ($v \in E_1$).

Ce qui prouve que : $x_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi(\psi(n))} + v_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow u+v$.

Contradiction avec $(x_n)_{n\geq 1}$ sans sous-suite convergente.

Par conséquent, $T(M)$ est non relativ. compacte.

Ce qui prouve (ii).

Alors (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

<u>Corollaire 1</u>. ~~Soit G un 3ème Banach sur K~~ Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$, ~~Soit~~ et $S \in \mathcal{B}(F,G)$. On a les 2 propriétés suivantes.

(i) Si $T \in \Phi_+(E,F)$ et $S \in \Phi_+(F,G)$, alors $ST \in \Phi_+(E,G)$, et de plus $\alpha(ST) \leq \alpha(T) + \alpha(S)$.

(ii) Si $T \in \Phi_-(E,F)$ et $S \in \Phi_-(F,G)$, alors $ST \in \Phi_-(E,G)$, et de plus $\beta(ST) \leq \beta(T) + \beta(S)$.

<u>Preuve.</u> (i) Supposons $T \in \Phi_+(E,F)$, $S \in \Phi_+(F,G)$.

Montrons $ST \in \Phi_+(E,G)$, en utilisant la Proposition précédente.

Soit M une partie bornée de E et non relativement compacte. Comme $T \in \Phi_+(E,F)$, en utilisant la Proposition 2, alors $T(M)$ est bornée de F et non relativement compacte.

De même, comme $S \in \Phi_+(F,G)$, alors $S(T(M)) = (ST)(M)$ est non relativement compacte. Ceci montre que $ST \in \Phi_+(E,G)$

Reste à vérifier que $\alpha(ST) \leq \alpha(T) + \alpha(S)$?

On a $\ker(ST) = \{x \in E : S(Tx) = 0\}$

$$= \{x \in E : Tx \in \ker S \cap R(T)\}$$

$\ker S \cap R(T)$.

Posons $F_1 = \ker S \cap R(T)$

Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de $\ker S$, et $\dim \ker S < \infty$, alors F_1 possède un supplémentaire F_2 dans $\ker S$.

Alors $\ker S = F_1 \oplus F_2$ (S.D.T).

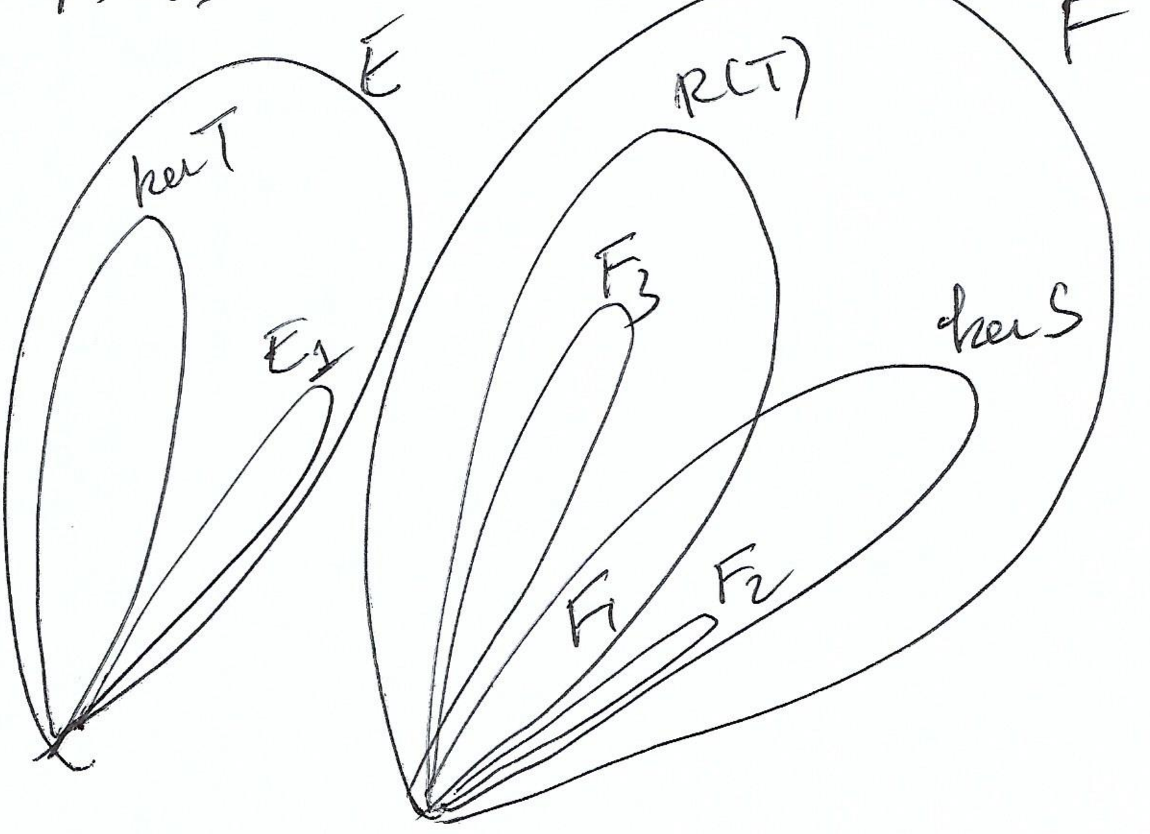
Comme F_1 est sous-espace vectoriel

de dimension dans l'espace de Banach $R(T)$,
alors il possède un supplémentaire
topologique F_3 dans $R(T)$.

Alors $R(T) = F_1 \oplus F_3$ (S.D.T).

D'autre part, comme $\ker T$ est un
sous-espace vectoriel de dimension finie
dans le Banach E, donc il possède
un supplémentaire topologique E_1 dans E.

Alors $E = \ker T \oplus E_1$. (S.D.T).



Soit l'opérateur :

$$\left[\begin{array}{lcl} \tilde{T} : E_1 & \longrightarrow & R(T), \\ x_1 & \longmapsto & \tilde{T}x_1 = Tx_1 . \end{array}\right.$$

Alors $\tilde{T}$ est linéaire borné bijectif entre les deux Banach E_1 et $R(T)$.

$\tilde{T}$ est donc inversible.

Soit $x \in E$. On pose $x = x_0 + x_1$, où $x_0 \in \ker T$, et $x_1 \in E_1$. On a alors:

$$\begin{aligned}[x \in \ker(ST)] &\Leftrightarrow [STx = 0], \\ &\Leftrightarrow [\tilde{T}x_1 \in F_1] \\ &\Leftrightarrow [x_1 \in \tilde{T}^{-1}(F_1)].\end{aligned}$$

D'où $\ker(ST) = \ker T \oplus \tilde{T}^{-1}(F_1)$.

Donc
$$\begin{aligned}\alpha(ST) &= \dim \ker T + \dim \tilde{T}^{-1}(F_1) \\ &= \alpha(T) + \dim F_1 \ (\text{car } \tilde{T}^{-1} \text{ bijectif}) \\ &\leq \alpha(T) + \alpha(S)\end{aligned}$$

(car $F_1 \subset \ker S$, et donc $\dim F_1 \leq \alpha(S)$).

(ii) Supposons $T \in \Phi_-(E,F)$, $S \in \Phi_-(F,G)$.

(a) Montrons $ST \in \Phi_-(E,G)$?

De la Proposition 1, on tire :

$$T' \in \Phi_+(F',E') \text{ et } S' \in \Phi_+(G',F').$$

En utilisant (i), on obtient $T'S' \in \Phi_+(G',E')$.

Or $T'S' = (ST)'$, donc $(ST)' \in \Phi_+(G',E')$.

En utilisant la Proposition 1 une 2ème fois,

on tire alors $ST \in \Phi_-(E,G)$.

(b) Reste à montrer que $\beta(ST) \leq \beta(T) + \beta(S)$?

Comme $R(T) \subset R(T) \oplus F_2$, et $R(T)$ de codimension finie, donc $R(T) \oplus F_2$ l'est aussi

Il existe alors un sous-espace F_4 de F de dimension finie t.q. $F = R(T) \oplus F_2 \oplus F_4$.

Alors $F = F_1 \oplus F_3 \oplus F_2 \oplus F_4$

$= \ker S \oplus F_3 \oplus F_4$.

Soit donc l'opérateur $\tilde{S} : F_3 \oplus F_4 \to R($

donné par :

$\forall x \in F_3 \oplus F_4, \quad \tilde{S}x = Sx.$

$\tilde{S}$ est donc linéaire borné bijectif.

De plus, on a :

$R(S) = S(F) = S(F_3 \oplus F_4)$

$= S(F_3) \oplus S(F_4)$ (???)

et $R(ST) = S(R(T)) = S(F_1 \oplus F_3) = S(F_3)$.

D'autre part, comme $R(S)$ est de codimension finie, il existe alors un sous-espace de dimension finie G_1 de G tel que :

$G = R(S) \oplus G_1$.

D'où alors : $G = G_1 \oplus S(F_3) \oplus S(F_4)$.

On a donc :

$\beta(ST) = \text{codim } R(ST)$

$= \text{codim } S(F_3)$

$= \dim(G_1 \oplus S(F_4))$

$= \dim G_1 + \dim S(F_4)$

$= \dim G_1 + \dim \tilde{S}(F_4)$

$= \dim G_1 +$

$$= \beta(S) + \dim F_4 \quad (\text{car } \tilde{S} \text{ bijectif})$$

$$\leq \beta(S) + \beta(T),$$

(car $F_4 \subset F_2 \oplus F_4$ et $\beta(T) = \dim F_2 + \dim F_4$)

<u>Remarque 2.</u> L'inégalité dans (ii) dans le ~~proposition~~ Corollaire précédent peut se déduire directement de l'inégalité dans (i). En effet

$$\beta(ST) = \alpha((ST)') \quad (\text{Formules de dualités})$$

$$= \alpha(T'S')$$

$$\leq \alpha(T') + \alpha(S') \quad (\text{d'après (i)})$$

$$= \beta(T) + \beta(S) \quad (\text{Formules de dualités})$$

<u>Corollaire 2.</u> Soit $T \in B(E,F)$, $S \in B(F,G)$.

On a alors les deux propriétés suivantes:

(i) Si $ST \in \Phi_+(E,G)$, alors $T \in \Phi_+(E,F)$,

(ii) si $ST \in \Phi_-(E,G)$, alors $S \in \Phi_-(E,F)$.