Preuve: (i)? Supposons $ST \in \Phi_+(E,G)$.

Montrons $T \in \Phi_+(E,F)$?

Soit M une partie bornée non relat. comp. de E.

Donc $(ST)(M) = S(T(M))$ est non relat. comp.

Par conséquent, $T(M)$ est aussi non relat. comp. ???

Alors $T \in \Phi_+(E,F)$.

(ii) Supposons $ST \in \Phi_-(E,G)$.

Montrons $S \in \Phi_-(F,G)$?

On a: $(ST)' = T'S' \in \Phi_+(G', E')$.

D'après (i), $S' \in \Phi_+(G', F')$.

Alors $S \in \Phi_-(F,G)$.

Corollaire 3: Soit K un compact de $B(E,F)$.

On a les deux propriétés suivantes:

(i) si $T \in \Phi_+(E,F)$, alors $T + K \in \Phi_+(E,F)$,

(ii) Si $T \in \Phi_-(E,F)$, alors $T + K \in \Phi_-(E,F)$.

Preuve : (i) Sup. $T \in \Phi_+(E, F)$.
Montrons que $T + K \in \Phi_+(E, F)$?
Soit M une partie bornée non relat. comp. de E.
Montrons que $(T+K)(M)$ non relat. comp. ?
Par l'absurde, supposons $(T+K)(M)$ relat. comp.
Comme $T \in \Phi_+(E, F)$, donc $T(M)$ est non relat. comp. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans M telle que la suite $(Tx_n)_{n\geq 1}$ est sans sous-suite convergente.
Comme K est compact et $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée, donc la suite $(Kx_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $(Kx_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ convergente dans F.
Comme $(T+K)(M)$ est relat. comp.,
donc la suite $((T+K)x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $((T+K)x_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ conv.

Donc $\left(T x_{\alpha(\varphi(n))}\right)_{n\geq 1}$ converge.

Contradiction avec $(T x_n)_{n\geq 1}$ sans s-suite conv.

Par conséquent, $(T+K)(M)$ non relat. comp.

Donc $T+K \in \Phi_+(E,F)$.

(ii) Supposons $T \in \Phi_-(E,F)$.

Montrons $T+K \in \Phi_-(E,F)$?

On a : $T' \in \Phi_+(F', E')$.

D'après (i) :

Alors $T'+K' \in \Phi_+(F', E')$,

car K' est un compact de $B(F', E')$.

Donc $(T+K)' = T'+K' \in \Phi_+(F', E')$

Par conséquent, $T+K \in \Phi_-(E,F)$.

§3 - Les Opérateurs de Fredholm

et

Inversibilité modulo compacts

Définition 1 : Un opérateur $T \in \mathcal{B}(E,F)$ est dit de Fredholm si $T \in \Phi_+(E,F) \cap \Phi_-(E,F)$;

i.e : T est Fredholm + et Fredholm - à la fois.

Remarque 1. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(E,F)$ à image fermée, est de Fredholm ssi $i(T) \in \mathbb{Z}$,

i.e : $i(T)$ fini.

Exemples :

(1) Tout opérateur inversible de $\mathcal{B}(E,F)$ est de Fredholm d'indice 0.

(2) Si K est un opérateur compact de $\mathcal{B}(E,F)$ et λ un scalaire non nul, alors $K - \lambda I$ est un Fredholm d'indice 0.

En effet : Soit K un compact de $B(E,F)$,
et λ un scalaire non nul.

En vertu du Chap. 3, on a :

(•) $\dim \ker (K - \lambda I) < \infty$;

(••) $R(K - \lambda I)$ fermé.

A partir de la Prop. 5 et Prop. 6 de la section 1 de ce chapitre, on a :

$$\beta(K - \lambda I) = \alpha\left((K - \lambda I)'\right)$$
$$= \alpha(K' - \lambda I) < \infty.$$
$$= \alpha(K - \lambda I)$$

Donc $K - \lambda I$ est de Fredholm d'indice 0.

<u>Proposition 1</u> : Soit T un opérateur de Fredholm de $B(E,F)$ d'indice j ($j \in \mathbb{Z}$), et soit S un opérateur inversible de $B(F,G)$ ~~(ou G un Banach sur K)~~. Alors ST est un Fredholm de $B(E,G)$ d'indice j.

<u>Preuve</u> : Il est facile de voir que :

$(\bullet)$ $\alpha(ST) = \alpha(T) < \infty$.

$\bullet$ Comme $R(T)$ est fermé et de codimension finie, il existe un s.e.v. M de F de dimension finie t.q : $F = R(T) \oplus M$ est une S.D.T.

On a donc (car S inversible de $B(F,G)$)

$$G = S(F),$$
$$= S(R(T)) \oplus S(M) \quad (???)$$
$$= R(ST) \oplus S(M).$$

On a donc

$$\beta(ST) = \operatorname{codim} R(ST)$$
$$= \dim S(M)$$
$$= \dim M < \infty \quad (\text{car } S \text{ lin. bijectif})$$
$$= \operatorname{codim} R(T)$$
$$= \beta(T) < \infty.$$

Donc ST est de Fredholm et
$i(ST) = \beta(ST) - \alpha(ST) = \beta(T) - \alpha(T) = j$

Notation 1 :

(i) On note $\Phi(E,F) = \Phi_+(E,F) \cap \Phi_-(E,F)$, l'ensemble des opérateurs de Fredholm de $B(E,F)$.

(ii) On note $\Phi_j(E,F) = \{T \in \Phi(E,F) : i(T) = j\}$, (où $j \in \mathbb{Z}$), l'ensemble des opérateurs de Fredholm de $B(E,F)$ d'indice j.

Proposition 2. Soit $T \in \Phi(E,F)$, $S \in \Phi(F,G)$.

Alors on a :

(i) $ST \in \Phi(E,G)$,

(ii) $i(ST) = i(T) + i(S)$.

Preuve :

(i) ~~décou~~ découle directement du Corollaire 1 de la section 2.

(ii) ? On utilisera ici les donnés cités dans la preuve du Corollaire 1 de la section 2. A savoir

$$\left\{\begin{aligned}
F_1 &= \ker S \cap R(T), \\
\ker S &= F_1 \oplus F_2, \\
R(T) &= F_1 \oplus F_3, \\
F &= R(T) \oplus F_2 \oplus F_4, \\
&= \ker S \oplus F_3 \oplus F_4, \\
R(ST) &= S(F_3), \\
&= R(S) \oplus G_1, \\
G &= R(S) \oplus S(F_4) \\
&= G_1 \oplus S(F_3)
\end{aligned}\right.$$

On a donc :

(•) $\alpha(ST) = \alpha(T) + \dim F_1$ (voir page 17).

(•) $\beta(ST) = \operatorname{codim} S(F_3)$
$= \beta(S) + \dim F_4$ (voir page 20).

(•) $\alpha(S) = \dim F_1 + \dim F_2$,

(•) $\beta(T) = \dim F_2 + \dim F_4$

On a donc :

$$i(ST) = \beta(ST) - \alpha(ST),$$

$$= \beta(S) + \dim F_4 - \alpha(T) - \dim F_1,$$

$$= \left[\beta(S) - (\dim F_1 + \dim F_2)\right]$$

$$+ \left[(\dim F_2 + \dim F_4) - \alpha(T)\right]$$

$$= (\beta(S) - \alpha(S)) + (\beta(T) - \alpha(T))$$

$$= i(T) + i(S).$$

__Remarque__ 3. (i) La fonction $i(\cdot) : \phi(E) \to \mathbb{Z}$ est logarithmique.

(ii) Les deux fonctions :

$$\begin{cases} \alpha(\cdot) : \phi_+(E) \longrightarrow \mathbb{Z}, \\ \beta(\cdot) : \phi_-(E) \longrightarrow \mathbb{Z} \end{cases}$$

sont sous-logarithmiques.

__Notations__ : (i) On note par $\mathcal{F}(X)$, l'ens. des opérateurs de rang finis de $B(X)$,

(ii) et par $\mathcal{K}(X)$, l'ens. des opérateurs compacts de $B(X)$ (où X Banach),

Proposition 3 : Soit $T \in B(E,F)$, $S \in B(F,G)$.

On a alors :

Si $ST \in \phi(E,F)$, alors $T \in \phi_+(E,F)$ et

$S \in \phi_-(F,G)$.

Preuve : Ceci découle directement du

Corollaire 2 de la section 2.

Proposition 4 : Soit $T \in B(E,F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \phi(E,F)$,

(ii) il existe $S \in B(F,E)$, $P \in \mathcal{F}(E)$, $Q \in \mathcal{F}(F)$

tels que :

$$\begin{cases} ST = I - P, \; TS = I - Q, \\ TP = 0, \; PS = 0, \; QT = 0, \; SQ = 0, \end{cases}$$

(iii) il existe $S_1, S_2 \in B(F,E)$, $K_1 \in \mathcal{K}(E)$,

$K_2 \in \mathcal{K}(F)$ tels que :

$$\begin{cases} S_1 T = I_E + K_1, \\ T S_2 = I_F + K_2. \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} S_1 T = I_E + K_1, \\ T S_2 = I_F + K_2 \end{cases}}.$$

__Preuve__ : $(i) \Longrightarrow (ii)$? Supposons (i) vraie,

Comme $\dim \ker T < \infty$, alors $\ker T$ possède un supplémentaire topologique E_1 dans E.

Alors $E = \ker T \oplus E_1$ $(S.D.T)$.

Et comme $R(T)$ fermé et de codimension finie, alors $R(T)$ possède un supplémentaire topologique F_1 de dimension finie dans F.

Alors $\begin{cases} F = R(T) \oplus F_1 \; (S.D.T) \\ \dim F_1 < \infty. \end{cases}$

Soit l'opérateur :

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{T} : E_1 \longrightarrow R(T) \\ \quad x_1 \longmapsto \tilde{T}x_1 = Tx_1 . \end{array} \right.$$

A vérifier :

(•) $\tilde{T}$ linéaire,