(••) $\tilde{T}$ borné,

(•••) $\tilde{T}$ bijectif,

(••••) $R(T) = T(E_1) = R(\tilde{T})$.

Comme $R(T)$ et E_1 sont fermés dans des Banach, ils sont donc des Banach.

Alors $\tilde{T}$ est inversible.

Soit l'opérateur $S: F = R(T) \oplus F_1 \longrightarrow E = E_1 \oplus \ker T$

donné par :

si $y \in F$, alors $y = Tx_1 + y_1$, $x_1 \in E_1$, $y_1 \in F_1$
(avec x_1, y_1 unique) ???

alors $Sy = x_1$.

On a donc :

(a) S est bien défini, car x_1 est unique.

(b) S linéaire (facile).

(c) S borné. En effet,

Suivant la S.D.T. $F = R(T) \oplus F_1$,

il existe une constante $\alpha > 0$ t.q :

pour tout $y \in F$ ($y = y_1 + y_2$, $y_1 \in F_1$, $y_2 \in R(T)$), alors $\|y_2\| \leq \alpha \|y\|$ (*)

Comme $\tilde{T}$ est inversible, il est donc minoré, il existe alors une cste $\beta > 0$ t.q : (**) $\|\tilde{T}x_1\| \geq \beta\|x_1\|$, pour tout $x_1 \in E_1$.

Soit maintenant $y \in F$, avec

$$y = Tx_1 + y_1, \quad x_1 \in E_1, \quad y_1 \in F_1.$$

On a donc $\|x_1\| \leq \frac{1}{\beta}\|\tilde{T}x_1\| = \frac{\|Tx_1\|}{\beta}$

(d'après (**)), et

$\|Tx_1\| \leq \alpha\|y\|$ (d'après (*)).

On a donc $\|Sy\| = \|x_1\| \leq \frac{\alpha}{\beta}\|y\|$.

Ce qui montre S borné.

Suivant la S.D.T. $E = E_1 \oplus \ker T$,

Soit P la projection de E sur $\ker T$ // à E_1.

Alors $P \in B(E)$, et P de rang fini.

(car $\dim R(P) = \dim \ker T < \infty$).

Soit $x \in E$. Alors $x = x_0 + x_1$, pour $x_0 \in \ker T$, $x_1 \in E_1$.

D'où alors :

$STx = STx_1 = x_1 = (I-P)x$.

Et alors $ST = I - P$,

avec $P \in B(E)$, de rang fini.

De plus, il est facile de voir :

$TP = 0$ et $PS = 0$.

Soit maintenant, ~~Q~~ Q la projection de F sur F_1 // à $R(T)$ (suivant la S.D.T. $F = R(T) \oplus F_1$) :

Alors $Q \in B(F)$, et Q de rang fini (car $\dim R(Q) = \dim F_1 < \infty$).

Soit $y \in F$. Alors $y = Tx_1 + y_1$, où $x_1 \in E_1$, $y_1 \in F_1$. Alors

$TSy = Tx_1 = (I-Q)y$.

Et alors $TS = I - Q$,

avec $Q \in B(F)$, Q de rang fini.

Il est facile de vérifier que:

$QT = 0$ et $SQ = 0$.

Ce qui montre (ii).

$(ii) \Longrightarrow (iii)$? Supposons (ii) vraie.

Il suffit de choisir $K_1 = P$ et $K_2 = Q$. Comme P et Q sont de rang finis, donc $K_1 \in B(E)$, $K_2 \in B(F)$, avec K_1 et K_2 compacts. Prendre $S_1 = S_2 = S$.

~~et de plus:~~ $S_1, S_2 \in B(F, E)$,

On a donc

et $\begin{cases} S_1 T = I_E + K_1, \\ T S_2 = I_F + K_2 \end{cases}$.

avec K_1, K_2 compacts.

35

~~29~~ ~~29~~

(iii) $\Longrightarrow$ (i)? Supposons (iii) vraie.

Comme $S_1 T = I_E + K_1 \in \Phi(E)$ (voir Ex.2),

donc $T \in \Phi_+(E,F)$ (voir Prop.3).

Et comme $TS_1 = I_F + K_2 \in \Phi(F)$ (voir Ex.2)

donc $T \in \Phi_-(F,E)$ (voir Prop.3).

Donc $T \in \Phi(E,F)$.

<u>Proposition 5.</u> Soit $j \in \mathbb{Z}$. Alors $\Phi_j(E,F)$ est un ouvert de $B(E,F)$; autrement, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour $T \in \Phi_j(E,F)$, pour chaque $S \in B(E,F)$ vérifiant $\|S\| < \varepsilon$, alors $T + S \in \Phi_j(E,F)$.

<u>Preuve:</u> Soit $T \in \Phi_j(E,F)$.

D'après la Prop. 4, il existe $S_1, \cancel{S_2} \in B(F,E)$, $K_1, \cancel{K_2} \in \mathcal{K}(E)$, $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ t.q:

$S_1 T = I_E + K_1$, $TS_1 = I_F + K_2$. (*)

Prendre $\varepsilon = ~~\min~~ \{ \|S_1\|^{-1}, ~~\|S_2\|^{-1}\}~~$.

On alors $\varepsilon > 0$ (???).

Soit $S \in B(E,F)$ vérifiant $\|S\| < \varepsilon$.

De (*), on tire :

$$(**) \begin{cases} S_1(T+S) = I_E + S_1 S + K_1, \\ (T+S) S_1 = I_F + S S_1 + K_2. \end{cases}$$

Or $\begin{cases} \|S_1 S\| \leq \|S_1\| . \|S\| < 1 \\ \|S S_1\| \leq \|S\| \|S_1\| < 1 \end{cases}$,

donc $I_E + S_1 S$ et $I_F + S S_1$ sont inversible

En utilisant (**), on obtient donc :

$$(***) \begin{cases} \left((I_E + S_1 S)^{-1} S_1\right) . (T+S) = I_E + L_1, \\ (T+S)\left(S_1 (I_F + S S_1)^{-1}\right) = I_F + L_2, \end{cases}$$

où $L_1 = (I_E + S_1 S)^{-1} K_1 \in \mathcal{K}(E)$,

et $L_2 = K_2 (I_F + S S_1)^{-1} \in \mathcal{K}(F)$.

De (∗∗∗) et en appliquant la Proposition 4,
on tire que $T+S \in \Phi(E,F)$.

Reste à vérifier que $i(T+S) = j$?

A partir de (∗), on tire aussi que $S_1 \in \Phi(F,E)$,
et donc $i(S_1 T) = i(I_E + K_1) = 0$.

D'où $i(S_1) + i(T) = 0$, et donc $i(T) = -i(S_1)$

D'autre part, $(I_E + S_1 S)^{-1} S_1 \in \Phi(F)$, et
$i[(I_E + S_1 S)^{-1} S_1] = i(S_1) = -i(T)$.

D'où alors, à partir de (∗∗∗):
$$i\left[(I_E + S_1 S)^{-1} S_1 . (T+S)\right] = i(I_E + L_1) = 0,$$

Donc $i[(I_E + S_1 S)^{-1} S_1] + i(T+S) = 0$,
et alors $i(T+S) = -i[(I_E + S_1 S)^{-1} S_1]$
$= i(T)$.

Proposition 6 : Soit $T \in B(E,F)$, $K \in B(E,F)$, et $j \in \mathbb{Z}$.

Si $T \in \Phi_j(E,F)$ et K compact, alors

$$T + K \in \Phi_j(E, F).$$

Preuve : Supposons $T \in \Phi_j(E,F)$, K compact.

A partir de la Proposition 4, il existe $S \in B(F,E)$, $K_1 \in \mathcal{K}(E)$, $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ t.q

$$ST = I_E + K_1, \quad TS = I_F + K_2.$$

On a alors

$$\begin{cases} S(T+K) = I_E + SK + K_1 = I_E + L_1 \\ (T+K) \cdot S = I_F + KS + K_2 = I_F + L_2, \end{cases}$$

où $L_1 = SK + K_1 \in \mathcal{K}(E)$, $L_2 = KS + K_2 \in \mathcal{K}(F)$ et

Alors $T + S \in \Phi(E, F)$

$$0 = i[(T+K)S] = i(T+K) + i(S)$$

Alors $i(T+K) = -i(S) = i(T)$.

<u>Proposition 7</u>. Soit $T \in B(E)$.

Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \Phi_0(E)$,

(ii) $\exists S \in B(E)$, S inversible, $\exists L \in \mathcal{F}(E)$, $T = S + L$

(iii) $\exists S \in B(E)$, S inversible, $\exists K \in \mathcal{K}(E)$, $T = S + K$

<u>Preuve:</u> $(i) \Rightarrow (ii)$? Supposons (i) vraie.

Il existe deux sous-espaces E_1 et F_1 de E

t.q. $E = \ker T \oplus E_1$, $F = R(T) \oplus F_1$,

où $\dim \ker T < \infty$, et $\dim F_1 < \infty$,

et $\dim \ker T = \dim F_1$.

Il existe alors un opérateur linéaire bijectif :

$$H : \ker T \longrightarrow F_1 \quad (???).$$

H est donc inversible

Soit l'opérateur

$$\left[\tilde{T} : E_1 \longrightarrow R(T),\ x_1 \longmapsto \tilde{T}x_1 = Tx \right].$$

$\tilde{T}$ est donc linéaire borné inversible.

Soit l'opérateur $S : E \longrightarrow E$ donné par

Si $x \in E$, $x = x_0 + x_1$, où $x_0 \in \ker T$, $x_1 \in E_1$,

alors $Sx = Hx_0 + \tilde{T}x_1$.

Il est facile de vérifier que :

S est linéaire borné inversible.

D'autre part, soit l'opérateur $L : E \longrightarrow E$

donné par :

Si $x \in E$, $x = x_0 + x_1$, où $x_0 \in \ker T$, $x_1 \in E_1$,

alors $Lx = -Hx_0$.

L est ~~donc~~ donc linéaire borné de

rang fini ~~de~~ sur E.

Vérifions que $T = S + L$?

Soit $x \in E$, avec $x = x_0 + x_1$, où $x_0 \in \ker T$, $x_1 \in E_1$,

On a donc $(S+L)x = \tilde{T}x_1 = Tx$.

Alors $T = S + L$.

Ce qui montre (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Il suffit de prendre $K = L$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)? Supposons (iii) vraie.

Alors $T = S + K$, où $S \in B(E)$, $K \in \mathcal{K}(E)$, avec S inversible.

On a donc :

$$\begin{cases} S^{-1}T = I + K_1 \\ TS^{-1} = I + K_2, \end{cases}$$

où $K_1 = S^{-1}K \in \mathcal{K}(E)$,

$K_2 = KS^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.

Alors $T \in \Phi(E)$.

De plus, on a :

$i(T) = i(S^{-1}T) = i(I + K_1) = 0$.