§4. L'algèbre de Calkin

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et par $\mathcal{K}(E)$ l'idéal bilatère des opérateurs compacts de $B(E)$.

$\mathcal{K}(E)$ étant fermé dans $B(E)$ et $B(E)$ étant un Banach, donc l'espace normé quotient $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est un Banach :

(•) L'addition dans $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est donnée par :

$\forall A, B \in B(E)$, $[A] + [B] = [A+B]$,

(••) La multiplication externe sur $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est donnée par :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in B(E)$, $\lambda . [A] = [\lambda A]$,

(•••) La norme sur $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est donnée par :

$\forall A \in B(E)$, $\|[A]\| = \inf_{K \in \mathcal{K}(E)} \|A - K\|$;

(••••) L'élément 0 de $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est :

$[K] = 0 = \mathcal{K}(E)$, pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$.

On définit sur $B(E)/_{\mathcal{K}(E)}$ une multiplication interne par :

$\forall A, B \in B(E)$, $[A]\cdot[B] = [AB]$. (*)

<u>Proposition 1</u> : L'espace de Banach quotient $B(E)/_{\mathcal{K}(E)}$ muni de la multiplication interne définie par (*) est une algèbre de Banach unitaire d'élément unité $I = [I]$.

<u>Preuve :</u>

(•) $B(E)/_{\mathcal{K}(E)}$ est un Banach.

(••) Pour tous $A, B, C \in B(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $([A]\cdot[B])\cdot[C] = [A]\cdot([B]\cdot[C])$ (facile)

- $\begin{cases} ([A]+[B])\cdot[C] = [A]\cdot[C] + [B]\cdot[C] \text{ (facile)}. \\ [A]\cdot([B]+[C]) = [A]\cdot[B] + [A]\cdot[C] \text{ (")}. \end{cases}$

- $\lambda([A]\cdot[B]) = (\lambda[A])\cdot[B] = [A]\cdot(\lambda[B])$ (").

- $[A]\cdot[I] = [I]\cdot[A] = [A]$ (facile).

(•••) Pour tous $A, B \in B(E)$, on a :

$$\|[A]\cdot[B]\| \leq \|[A]\|\cdot\|[B]\|$$

En effet, pour $A, B \in \mathcal{B}(E)$, on a :

$$\|[A]\cdot[B]\| = \|[AB]\|$$

$$= \inf_{K \in \mathcal{K}(E)} \|AB - K\|$$

$$\leq \inf_{K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)} \|(A-K_1)(B-K_2)\| \quad ???$$

$$\leq \inf_{K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)} (\|A-K_1\|\cdot\|B-K_2\|)$$

$$= \inf_{K_1 \in \mathcal{K}(E)} \|A-K_1\| \cdot \inf_{K_2 \in \mathcal{K}(E)} \|B-K_2\|$$

$$= \|[A]\|\cdot\|[B]\|.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}(E)/\mathcal{K}(E)$ est donc une algèbre de Banach unitaire.

<u>Proposition 2</u>. Soit $A \in \mathcal{B}(E)$. On a alors l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $A \in \Phi(E)$,

(ii) $[A]$ est un élément inversible de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(E)/\mathcal{K}(E)$.

Preuve: (i) $\Longrightarrow$ (ii) ?

Supposons (i) vraie. Montrons (ii)?

En vertu de la Proposition 4 de la section 3, il existe alors $S \in B(E)$, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$ t.q.

$$ST = I + K_1 \text{ , et } TS = I + K_2 \text{ .}$$

On a donc :

$$[S]\cdot[T] = [ST] = [I + K_1]$$
$$= [I] + [K_1]$$
$$= I + 0$$
$$= I \text{ ,}$$

et de même :

$$[T]\cdot[S] = [TS] = [I + K_2] = I \text{ .}$$

Alors $[T]$ est inversible dans $B(E)/\mathcal{K}(E)$,

avec $[T]^{-1} = [S]$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons (i)?

Supposons (ii) vraie.

Il existe alors $S \in B(E)$ t.q :

$$[S]\cdot[T] = [T]\cdot[S] = [I].$$

Ceci donne alors :

$$[ST - I] = [TS - I] = 0,$$

autrement $ST - I$ et $TS - I$ sont compacts.

Posons alors $ST - I = K_1$ et $TS - I = K_2$.

On a donc :

$$ST = I + K_1, \text{ et } TS = I + K_2,$$

où $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$.

En appliquant la Proposition 4 de la Section 3, on obtient alors $T \in \Phi(E)$.

<u>Définition</u> 1 : L'algèbre de Banach quotient $B(E)/\mathcal{K}(E)$ est dite, l'algèbre de Calkin.

<u>Notation 2</u>. On note par $C(E) = B(E)/\mathcal{K}(E)$, l'algèbre de Calkin.

<u>Proposition 2.</u> La surjection canonique

$$\begin{cases} B(E) \xrightarrow{\quad \pi \quad} C(E) \\ T \longmapsto \pi(T) = [T] \end{cases}$$

est un homomorphisme d'algèbre surjectif contractif.

<u>Preuve:</u>

(1) π est linéaire (clair).

(2) π multiplicative (vraie par définition), car $\pi(T.S) = [T.S] = [T].[S] = \pi(T).\pi(S)$, pour tous $T, S \in B(E)$.

(3) π surjectif (évident).

(4) π contractif? En effet, pour $T \in B(E)$:

$$\|\pi(T)\| = \|[T]\|,$$
$$= \inf_{K \in K(E)} \|T - K\|$$
$$\leq \|T\| \quad (\text{car } 0 \in K(E)).$$

<u>Définition 2</u>. Soit $T \in B(E)$. On appelle le spectre essentiel de T, noté $\sigma_e(T)$, le spectre de $[T]$ dans l'algèbre de Calkin $C(E)$.

i.e. $\sigma_e(T) = \sigma([T])$

$= \{\lambda \in \mathbb{K} : [T] - \lambda I$ non inv. de $C(E)\}$

<u>Proposition 3</u>. Pour tout $T \in B(E)$, on a :

$\sigma_e(T) \subset \sigma(T)$.

<u>Preuve</u>. Soit $T \in B(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Supposons $\lambda \notin \sigma(T)$.

Il existe alors $S \in B(E)$ t.q.

$S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S = I$.

On a donc

$$\begin{cases} [S] \cdot [T - \lambda I] = [S(T - \lambda I)] = [I] = I, \\ [T - \lambda I] \cdot [S] = [(T - \lambda I)S] = [I] = I. \end{cases}$$

D'où alors.

$[S] \cdot ([T] - \lambda I) = ([T] - \lambda I) \cdot [S] = I$.

ceci montre que $\lambda \notin \sigma([T])$.

Donc : $\sigma_e(T) \subset \sigma([T])$.