Choses utiles

H : Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

T un compact de $B(H)$, $T \neq 0$.

T s'écrit ~~donc~~ : $T = \sum_{n=1}^{N} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$, où

(∘) $N = \text{rg}\, T$ (rang fini ou infini).

(∘∘) $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots > 0$,

(∘∘∘) si $N = \infty$, alors $s_n \longrightarrow 0$.

La suite décroissante $\{s_n\}_{n=1}^{N}$ est unique, c'est la suite des valeurs singulières de T. $s_n = s_n(T)$

L'écriture précédente est dite : une écriture spectrale (2$^{\text{e}}$ forme).

Cas où T est auto-adj. Dans ce cas, T s'écrit sous la forme : $T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n \otimes \varphi_n$, où

(∘) $N = \text{rg}\, T$,

(∘∘) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots > 0$,

(∘∘∘) si $N = \infty$, alors $\lambda_n \longrightarrow 0$

Dans ce cas, la suite $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ représente $\sigma(T) \setminus \{0\}$, où chaque λ_n est une valeur propre de T, et $|\lambda_n| = s_n$, pour tout n.

$\lambda_n = \lambda_n(A)$ 1

Cette dernière écriture est dite : une écriture spectrale (1$^{\text{e}}$ forme) ; s'applique seulement lorsque T compact auto-adj.

Revenons au cas général : T compact.

Alors $|T| = \sum_{n=1}^{N} s_n \varphi_n \otimes \varphi_n$

Cette écriture est à la fois sous sa 1$^{\text{e}}$ forme et 2$^{\text{e}}$ forme. Et on remarque que

$s_n = s_n(T) = s_n(|T|)$, pour tout n.

où $\{s_n\}_{n=1}^{N} = \sigma(|T|) \setminus \{0\}$:

ens. des v.p. de $|T| \neq 0$.

On a donc $\underline{\|T\| = \||T|\| = \max s_n} = s_1$.

<u>Suppression de dimensions</u>

(a) Soit n un entier naturel $\neq 0$, $n < N$.

Alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \psi_k \otimes \varphi_k$ de rg n

où $\|T_n\| = \|T\| = s_1$ (prendre toujours la plus grande valeur singulière de T_n : $s_1, \dots, s_n$.

(dans ce cas, on a supprimé : $\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \psi_{n+2}, \varphi_N, \psi_N$. (si $N < \infty$), ou bien $\{\varphi_{n+1}\}, \{\psi_{n+1}\}$ . . . .

(b) Soit n un entier naturel, $\neq 0$, $n < N$.

Alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{N} s_k \, \psi_k \otimes \varphi_k$

R_n est de rang fini, si $N < \infty$,

R_n " " " infini, si $N = \infty$.

R_n est un compact de V.S. $\{s_k\}_{k \geq n+1}^{N}$

Donc $\|R_n\| = s_{n+1}$, toujours prendre la plus grande des V.S. de R_n.

Notons que $T = T_n + R_n$, $\forall n$

Dans ce dernier cas, on a supprimé un nbre fini de dimension $\{\varphi_1, \psi_1\} \ldots \{\varphi_n, \psi_n\}$.

<u>Cas $N = \infty$:</u>

Comme $s_{n+1} \longrightarrow 0$, alors

$\|T - T_n\| \longrightarrow 0$.

~~si N = ∞,~~

Autrement : $\cancel{T = \sum_{n=1}}$

La convergence dans la série : ~~T~~

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n \otimes \varphi_n$ est uniforme.

Car $T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi_k \otimes \varphi_k$, $n \geq 1$

et $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Supposons maintenant : $T \in \mathcal{C}_p(H)$, où $p \geq 1$.

ceci est équivalent à

$$\sum_{n=1}^{N} s_n^p < \infty ,$$

La norme p de T est donnée par :

$$\|T\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n^p\right)^{1/p} .$$

Pour un entier naturel non nul n : $n < N$:

$$\|T_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p\right)^{1/p} < \infty, \quad T_n \in \mathcal{C}_p$$

$$\|R_n\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{N} s_k^p\right)^{1/p} < \infty, \quad R_n \in \mathcal{C}_p$$

Dans le cas $N = \infty$. On remarque

(∘) La série $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p$ converge.

(∘∘) La série : $\|R_n\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^p$ représente le reste d'ordre n de la série conv. $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p$.

(∘∘∘) Donc $\|R_n\|_p = \|T - T_n\|_p \longrightarrow 0$

ceci montre que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} T$ — (*)

Notations : (1) $\mathcal{F}(H)$: l'idéal bilatère propre de tous les opérateurs de rang fini de $B(H)$

(2) $\mathcal{K}(H)$: l'idéal bilatère propre de tous les opérateurs compacts de $B(H)$.

~~Anto~~ A noter que : pour $p \geq 1$:

(∘) $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{C}_p(H) \subset \mathcal{K}(H)$

(∘∘) $\overline{\mathcal{F}(H)} = \mathcal{K}(H)$ (par rapport à la norme de $B(H)$) (voir cours)

(∘∘∘) $\overline{\mathcal{F}(H)}^{p} = \mathcal{C}_p(H)$ (par rapport à la norme $\|\cdot\|_p$ de $\mathcal{C}_p$) (en utilisant (*))

Trace d'un opérateur

Ici $T \in \mathcal{C}_1(H)$.

L'application trace :

$$\begin{aligned} tr : (\mathcal{C}_1(H), \|\cdot\|_1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ T &\longmapsto tr\, T \end{aligned}$$

tr est donnée par :

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{N} s_n \langle \psi_n , \varphi_n \rangle$$

(i) tr est linéaire.

(ii) tr borné, car $|\operatorname{tr} T| \leq \| T \|_1$, $\forall T \in \mathcal{C}_1(H)$

(iii) $\| \operatorname{tr} \| = 1$.

(iiii) Si T est auto-adj, alors

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n , \text{ où } \lambda_n = \lambda_n(T)$$

Somme de toutes les v.p. de T données dans la 1ère forme $T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n \otimes$

Cas général : $T \in \mathcal{C}_1(H)$

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n , e_n \rangle \quad (**)$$

pour toute base hilb. $\{e_n\}$ de H.

notons que la série (**) est invariante par rapport aux bases hilbertiennes de T :

matriciellement : c'est la somme de tous les termes de la diagonale des matrices de T.

Projections orthogonale de $B(H)$

(1) Soit $N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ un système $\perp$.N. de H (fini ou infini).

Alors $P = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n : H \longrightarrow H$
$$x \longmapsto Px = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$$

est une projection $\perp$ de H sur le sous-espace $M = \overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}$.

En effet : ($\cdot$) P est linéaire borné (voir T.D.1).

($\cdot\cdot$) $P^* = P$ (voir T.D.1)

($\cdot\cdot\cdot$) $Pe_n = e_n$, pour tout n (par déf.).

($\cdot\cdot\cdot\cdot$) $P^2 = P\left(\sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n\right)$
$$= \sum_{n=1}^{N} Pe_n \otimes e_n = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes e_n = P$$

($\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$) $R(P) = \overline{R(P)} = \overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}} = M$.

P est donc une proj. $\perp$. de H sur M.

(2) Soit maintenant une proj. ⊥. P de H sur M (où M un sous-espace de H).

H étant séparable, donc M séparable.

Posons $N = \dim M$.

Soit $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ une base hilb. de M.

On a donc $\forall n,\ Pe_n = e_n$.

Soit $H = M \oplus M^{\perp}$, et $x \in H$.

Alors $x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \oplus x_0$,

pour un certain $x_0 \in M^{\perp}$

Comme $M = R(P)$, donc $M^{\perp} = R(P)^{\perp} = \ker P^{*}$
$= \ker P$.

$$\text{D'où}\quad Px = P\Big(\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big) + Px_0$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle Pe_n + 0$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$$
$$= \Big(\sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n\Big)(x)$$

D'où $\boxed{P = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n}$

Conclusion : les proj. $\perp$ de $B(H)$ sont de la forme

$$P = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n \quad , \text{ où}$$

$N = rg P$, $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ sy. $\perp$. N. de H

Les Isométries partielles de $B(H)$

(1) Soit $N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ deux syst. $\perp$. N. de H.

Alors $U : H \longrightarrow H$, $x \longmapsto Ux = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \psi_n$

est une isométrie partielle $\otimes$ d'espace initial $\left(\overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}\right)$ et d'espace final $\overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}}$.

D: On a $U = \sum_{n=1}^{N} \psi_n \otimes e_n$.

En effet :

(·) $U \in B(H)$ (Voir T.D.1)

(··) $\ker U = \left(\overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}\right)^{\perp}$,

$$\overline{R(U)} = \overline{sp\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}} \quad \text{(Voir T.D.1)}$$

Donc $(\ker U)^{\perp} = \overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}$.

Soit $x \in (\ker U)^{\perp}$. Donc

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$$

D'où
$$Ux = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle U e_n$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \varphi_n$$

Donc $\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$.

Alors $\|Ux\| = \|x\|$.

U est donc une isométrie partielle d'espace initial $\overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}$, et d'espace final $R(U) = \overline{R(U)} = \overline{sp\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}}$

(2) S U une isométrie partielle de $B(H)$ d'espace initial M, et d'espace final L

Donc U^*U est ~~la~~ projection orthogonale de H sur $R(U^*) = M$.

Soit $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ une base hilb. de M.

Donc
$$U^*U = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n \quad (*)$$

Posons $\psi_n = U e_n$, pour tout n.

Soient $n, m \geq 1$, alors

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \langle U e_n, U e_m \rangle$$
$$= \langle U^*U e_n, e_m \rangle = \langle e_n, e_m \rangle$$

Donc $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ est un syst. $\perp$. N. de H

De $(*)$:
$$U = UU^*U = \sum_{n=1}^{N} \psi_n \otimes e_n$$

Conclusion : Les isométries partielles de $B(H)$ sont de la forme

$$U = \sum_{n=1}^{N} \psi_n \otimes \varphi_n \,, \text{ où}$$

(◦) $N = \operatorname{rg} U$,

(◦◦) $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}^{N}$, $\{\psi_n\}_{n\geq 1}^{N}$ sont deux syst. ⊥. N. de H.

A vérifier que

$$\forall u, v \in H, \quad \operatorname{tr}(u \otimes v) = \langle u, v \rangle$$

utiliser l'écriture spectrale de $u \otimes v$, et appliquer la déf. de tr.