Départ. Maths
Univ. Batna 2

Contrôle Final : p-classes
A.F.T.O.L. S2 – 2019-2020

EXERCICE 1

Soit l'opérateur $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ donné par :

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, -\frac{1}{3}x_2, \frac{1}{5}x_3, \dots\right),$$

pour tout $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$.

1. Montrer T est linéaire borné auto-adjoint et compact.
2. Trouver le spectre de T.
3. Donner les valeurs singulières de T.

EXECICE 2

Soit l'opérateur $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ donné par

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(x_2, -\frac{2}{3}x_3, \frac{4}{9}x_4, -\frac{8}{27}x_5, \dots\right),$$

pour tout $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$

1. Montrer que T est linéaire borné et compact.
2 - Montrer que T est de classe p, pour tout $p \in [1, \infty[$.
3 - Trouver $\|T\|$, et $\|T\|_p$, pour $p \geq 1$.
4 - Calculer $\lim_{p\to\infty} \|T\|_p$.
5 - Que peut-on conclure ?

Bonus : EX.2 Questions 4 et 5.

Controle Final : φ-classes
Corrigé

Exercice 1

1. T lin. borné auto-adj. compact ?

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$. On a

$$
\begin{aligned}
Tx &= \left(x_1, -\frac{1}{3}x_2, \frac{1}{5}x_3, \dots\right)\\
&= x_1 e_1 - \frac{1}{3}x_2 e_2 + \frac{1}{5}x_3 e_3 + \dots\\
&= \langle x, e_1\rangle e_1 - \frac{1}{3}\langle x, e_2\rangle e_2 + \frac{1}{5}\langle x, e_3\rangle e_3 + \dots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\langle x, e_n\rangle e_n
\end{aligned}
$$

Prendre $\lambda_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $u_n = e_n$, $n\geq 1$.

D'où alors :

(i) $\forall n \geq 1$, $\lambda_n \in \mathbb{R}^*$,

(ii) La suite $\{|\lambda_n|\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\geq 1}$ est $\searrow$,

(iii) $\lim \lambda_n = \lim\limits_{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 0$,

(iv) $\{u_n\}_{n\geq 1}$ $\perp$. N,

(v) $\forall x \in \ell_2$, $Tx = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n$.

Donc T satisfait aux conditions du Théorème Spectral sous sa 1ère forme, T est donc lin. borné auto-adj. compact

2. $\sigma(T) = ?$

$$
\begin{aligned}
\sigma(T) &= \{\lambda_n : n\geq 1\} \cup \{0\}\\
&= \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} : n\geq 1\right\} \cup \{0\}\\
&= \left\{0, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots\right\}.
\end{aligned}
$$

3 _ Les valeurs singulières de T sont

$$s_n = s_n(T) = |\lambda_n| , \quad n \geq 1$$

$$s_n = \frac{1}{2n-1} , \quad n \geq 1 .$$

Exercice 2

1 - T lin. borné compact ?

Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$. On a :

$$Tx = \left(x_2 , -\frac{2}{3} x_3 , \frac{4}{9} x_4 , -\frac{8}{27} x_5 , \ldots \right)$$

$$= x_2 e_1 - \frac{2}{3} x_3 e_2 + \frac{4}{9} x_4 e_3 - \frac{8}{27} x_5 e_4 + \cdots$$

$$= \langle x, e_2 \rangle e_1 - \frac{2}{3} \langle x, e_3 \rangle e_2 + \frac{4}{9} \langle x, e_4 \rangle e_3$$

$$- \frac{8}{27} \langle x, e_5 \rangle e_4 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \langle x, e_{n+1} \rangle e_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \langle x, e_{n+1} \rangle \cdot \left((-1)^{n-1} e_n\right)$$

Prendre $s_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $\varphi_n = e_{n+1}$,

$$\psi_n = (-1)^{n-1} e_n , \quad n \geq 1 .$$

On a donc :

(i) $\forall n \geq 1, \quad s_n > 0,$

(ii) La suite $\{s_n\}_{n\geq 1} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}_{n \geq 1}$ est $\searrow$, car c'est une suite géom. de 1er terme 1, et de raison $r = \frac{2}{3}$, où $0 < r < 1$.

(iii) donc $\lim s_n = \lim r^{n-1} = 0$.

(iv) Les deux syst. $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} = \{e_{n+1}\}_{n \geq 1}$ et $\{\psi_n\}_{n\geq 1} = \{(-1)^{n-1} e_n\}_{n \geq 1}$ sont $\perp N$ ds ℓ_2

(v) $\forall x \in \ell_2, \; Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n$

T satisfait les conditions du Théorème spectral sous sa 2e forme, alors T est lin. borné compact.

2- Soit $p \in [1, \infty[$.
T est de classe p. En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} (r^{n-1})^p = \sum_{n=1}^{\infty} (r^p)^{n-1} < \infty,$$

car c'est une série géométique de raison r^p, et $0 < r^p < 1$.

(3) T est donc de classe p.

3 - (a) $\|T\| = ?$

On a $\|T\| = \sup_{n\geq 1} s_n = s_1 = 1$.

(b) $\|T\|_p = ?$ où $p \in [1, \infty[$.

On a :

$$\|T\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (r^p)^{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-r^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{3^p}{3^p-2^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

4 - $$\lim_{p\to\infty} \|T\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$= 1^{\frac{1}{p}} = 1$ car

$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^p = 0$.

(4)

(5) On a alors

$$1 = \|T\| = \lim_{p\to\infty} \|T\|_p .$$

Barême :

Ex 1 (10 pt)

1 _ 4 pts

2 _ 3 pts

3 _ 3 pts

Ex 2 : (12 pt)

1 _ 4 _ pts

2 _ 3 pts

3 _ 3 pts

$\left.\begin{array}{l}\text{4 \_ 1 pts}\\ \text{5 \_ 1 pts}\end{array}\right\}$ Bonus.