Preuve: Voir cours Licence (espace métrique).

Proposition : Il existe un couple unique $(U, P) \in B(H) \times B(H)$ vérifiant

(i) U isométrie partielle,

(ii) $P \geq 0$,

(iii) $\ker U = \ker P$,

(iv) $T = U.P$

Preuve: (a) Existence de (U, P).

Posons $P = |T|$.

On a alors $\ker P = \ker T = \ker(T^*T)$.

Soit l'opérateur $\left\{ \begin{array}{l} V_0 : R(P) \longrightarrow H \\ \quad Px \longmapsto Tx \end{array} \right.$

(•) V_0 bien défini? En effet,

Soient $x_1, x_2 \in H$ t.q. $Px_1 = Px_2$.

On a alors $P(x_1 - x_2) = 0$, d'où

$T(x_1 - x_2) = 0$, et donc $Tx_1 = Tx_2$