(b) Unicité de (U, P) ? En effet,

Soit $(U_1, P_1) \in B(H) \times B(H)$ vérifiant

(i), (ii), (iii), et (iv) de la Proposition.

On a donc

$$R(U_1^* U_1) = R(U_1^*) = (\ker U_1)^{\perp} = (\ker P_1)^{\perp}$$
$$= \overline{R(P_1)}.$$

Ceci montre (car $U_1^* U_1$ est la proj. $\perp$.

de H sur $R(U_1^* U_1) = R(U_1^*)$) que :

$U_1^* U_1 P_1 = P_1$ $(*)$

D'autre part, comme $T = U_1 P_1$, on a :

$$P^2 = T^* T = P_1 U_1^* U_1 P_1 \overset{(*)}{=} P_1^2.$$

Or $P \geq 0$, $P_1 \geq 0$, d'où alors

$$P = (P^2)^{\frac{1}{2}} = (P_1^2)^{\frac{1}{2}} = P_1.$$

On a alors $T = UP = U_1 P$,

et $\ker U_1 = \ker P_1 = \ker P = \ker U$.

Ceci montre que :

$U = U_1$, sur $R(P)$, donc aussi sur $\overline{R(P)}$,

car U et U_1 sont continues.