Rappel sur les opérateurs positifs

H : Hilbert complexe, $T \in B(H)$.

(1) $T^* T$ est positif.

(2) T auto-adjoint ssi $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in H$.

(3) $T \geq 0$ ssi $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$.

(4) On suppose T auto-adjoint, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $T \geq 0$, (ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$.

(5) Si T auto-adj., alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(6) Si $T \geq 0$, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$.

(7) Si $T \geq 0$, alors il existe un opérateur positif et un seul $P \in B(H)$ t.q. $T = P^2$. On note $P = T^{\frac{1}{2}} = \sqrt{T}$, appelé la racine carrée positive de T.

(8) On suppose $T \geq 0$. Alors T^2 l'est aussi et $(T^2)^{\frac{1}{2}} = T$.

(9) On suppose $T \geq 0$, $X \in B(H)$. Alors

$$TX = XT \iff T^{\frac{1}{2}} X = X T^{\frac{1}{2}}.$$

1