Remarque : Soit $T = UP$, la décomposition pôlaire de T. On a alors :

(i) $P = |T|$ (par construction).

(ii) $U^* T = U^* U P = P$. En effet, comme $\ker U = \ker P$, alors $R(U^* U) = R(U^*) = \overline{R(P)}$. U étant une isométrie partielle, donc $U^* U$ est la projection orthogonale de H sur $\overline{R(P)}$.

Ceci montre (ii).

(iii) $\ker T = \ker |T| = \ker(T^* T)$. En effet, pour tout $x \in H$, on a :

$$[Tx = 0] \Longrightarrow [T^* Tx = 0] \Longrightarrow [|T|^2 x = 0] \Longrightarrow [\langle |T|^2 x, x\rangle = 0] \Longrightarrow [\langle |T|x, |T|x\rangle = 0] \Longrightarrow [|T|x = 0] \Longrightarrow [Tx = 0] \quad (\text{car } T = U|T|)$$

Ceci montre que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes pour tout $x \in H$:

(•) $Tx = 0$, (••) $|T|x = 0$, (•••) $T^* Tx = 0$.