Lemme : Soit $T = U|T|$, la décomposition pôlaire de T. On a alors $|T^*| = U|T|U^*$.

Preuve: On a :

$$|T^*|^2 = TT^* = U|T||T|U^* = U|T|U^*U|T|U^*$$

$$= (U|T|U^*)^2.$$

Par passage à la racine carrée, on obtient

$$|T^*| = U|T|U^*,$$ car $|T^*| \geq 0$, $U|T|U^* \geq 0$.

Proposition : Soit $T = U|T|$, la décomposition pôlaire de T. Alors la décomp. pôlaire de T^* est donnée par $T^* = U^*|T^*|$.

Preuve: On a d'une part,

$$T^* = |T|U^*$$

$$= U^*U|T|U^*, \text{ car } U^*U|T| = |T|,$$

$$= U^*|T^*|, \text{ en vertu du lemme précédent}$$

D'autre part, on a ; pour tout $x \in H$:

$$(U^*x = 0) \Leftrightarrow (UU^*x = 0), \text{ (voir Remarque iii)}.$$

$$\Leftrightarrow (|T|U^*x = 0), \text{ (car } \ker|T| = \ker U)$$

$$\Leftrightarrow (T^*x = 0), \text{ (car } T^* = |T|U^*),$$

$$\Leftrightarrow (|T^*|x = 0), \text{ (voir Remarque iii)}$$