§ Projection orthogonale :

H : un Hilbert complexe, M un sous-espace de H (i.e. s.e.v. fermé).

1- Soit $H = M \oplus M^\perp$, la S.D.$\perp$. associée à M.
Pour chaque $x \in H$, $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$.
On note $P_M x = x_1$.
On a alors :
(i) $P_M : H \longrightarrow H$, $x \longmapsto P_M x = x_1$
est linéaire (facile à vérifier).
(ii) P_M borné. En effet,
D'après Pythagore : $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2$.
D'où alors $\|P_M x\| \leq \|x\|$.
Donc P_M est borné, et $\|P_M\| \leq 1$.
(iii) Si $M \neq \{0\}$, alors $\|P_M\| = 1$. En effet,
suppose $M \neq \{0\}$. Soit alors $u \in M$, $\|u\| = 1$.
Il est clair que $P_M u = u$ (car $u_1 = u$, $u_2 = 0$)
Donc $1 \geq \|P_M\| \geq \|P_M u\| = \|u\| = 1$.
Alors $\|P_M\| = 1$.