(iv) $R(P_M) = M$. (facile à vérifier).

(v) $\ker P_M = M^{\perp}$ (" " ").

(vi) $P_M^2 = P_M$. (" " ")

(vii) P_M auto-adjoint. En effet,

$$\begin{aligned} \langle P_M x, x\rangle &= \langle x_1, x_1 + x_2\rangle \\ &= \langle x_1, x_1\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, x_1\rangle \\ &= \langle x, P_M x\rangle \\ &= \langle P_M^* x, x\rangle. \end{aligned}$$

D'où alors $P_M = P_M^*$.

(viii) $P_M \geq 0$. En effet, d'après (vi), (vii):

$$P_M = P_M^2 = P_M^* \cdot P_M \geq 0 \text{ (d'après (v))}.$$

2 - Soit maintenant un opérateur $P \in B(H)$ vérifiant : $P^2 = P = P^*$.

Un exemple d'un tel opérateur est l'opérateur P_M donné précédement.