Posons $M = R(P)$.

(i) M est un sous-espace de H. En effet,

(·) Il est clair que M est un s.e.v. de H.

(··) Montrons que M fermé ?

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans H, $y \in H$ t.q. $Px_n \to y$.

P étant continue, donc $P^2 x_n \longrightarrow Py$.

Or $P^2 = P$, alors $Px_n \longrightarrow Py = y$.

D'où $y \in R(P)$. Donc M fermé.

(ii) $H = R(P) \oplus \ker P$, s.d.$\perp$. En effet,

Or $H = R(P) \oplus R(P)^{\perp}$ s.d.$\perp$. ($R(P)$ fermé)

$= R(P) \oplus \ker P^*$

$= R(P) \oplus \ker P$, car $P^* = P$.

(iii) $P = P_M$. (facile à vérifier).

<u>Définition</u> : Soit $P \in B(H)$. P est dit une projection orthogonale de $B(H)$ si :

$$P^2 = P = P^*.$$

<u>Remarque</u> : D'après (1) et (2) : Les projections orthogonales P de $B(H)$,