$$= \cancel{\sum_{i=1}} < x, \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i >$$

$$= < x , Px >$$

$$= < P^* x , x >$$

D'où $P^* = P = P^2$

$P$ est donc une proj. $\perp$. de $B(H)$

(....) $R(P) = sp\{e_1, \ldots, e_n\} := M$.

En effet, d'après (.) : $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset R(P)$.

D'où $sp\{e_1, \ldots, e_n\} \subset R(P)$.

D'autre part, pour $x \in H$ :

$$Px = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i \in sp\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Ceci montre que $R(P) = sp\{e_1, \ldots, e_n\} = M$.

Donc $P = P_M$.

(3) On suppose $\dim H = \infty$.

Soit $\{e_n\}_{n \geq 1}$ un système $\perp$. N. de $H$.

Posons $P = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes e_n$.

Alors $P \in B(H)$. (voir cours S.1).