Chapitre 0 : Quelques Rappels d'Algèbre linéaire et d'Analyse fonctionnelle

§ 1. Notions Utiles d'Algèbre linéaire

Dans tout ce qui suit, X et Y désigneront deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(i) Une partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ (où $n \geq 1$) dans X est dite libre si : pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

(ii) Une partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ (où $n \geq 1$) dans X est dite liée, si elle n'est pas libre ; autrement, il existe $j \in \{1, \dots, n\}$, t.q

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i u_i \text{ , pour } \cancel{\lambda_1 \dots \lambda} \text{ certains}$$

scalaires λ_i, $i = 1, \dots, n$, $i \neq j$ (l'un des vecteurs de $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une combinaison linéaire des autres.

(iii) Une partie L infinie dans X est dite libre dans X, si toute partie finie de L est libre dans X.

(iv) Une partie G dans X est dite une partie génératrice dans X, si tout vecteur de X s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire finie de vecteurs de G. Autrement, pour tout $x \in X$, il existe $u_1, \dots, u_n \in G$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t-q. $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

si $G = \{e_1, \dots, e_n\}$ (où $n \geq 1$, alors pour tout $x \in X$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t-q: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$; dans ce cas, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ qui représente, les coordonnés de x suivant ~~la~~ partie génératice G.

(V) X est dit de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.

(VI) Soit B une partie de X.
B est dite une base de X si B est libre et génératrice de X en même temps.

(VII) ~~Toutes~~ X possède toujours une base. Toutes les bases de X ~~de~~ ont le même cardinal; autrement, si B_1 et B_2 sont deux bases de X, alors B_1 et B_2 sont en bijections. En particulier, si X est de dimension finie, alors toutes les bases de X ont le même nombre d'objects n; et on note $\dim X = n$ (dimension).

(VIII) Exemples :

① Espace vectoriel de dimension finie.
$X = \mathbb{K}^n$ (où $n \geq 1$).

Soit $e_1 = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n})$, $e_2 = (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{n})$,

$\dots$, $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n}) \in \mathbb{K}^n$.

Il est facile de vérifier que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$; et donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.

B est appelée, la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(2) Espace de dimension infinie.

$X = C_{\mathbb{K}}[a,b]$, l'espace vectoriels des fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.

Posons $L = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, où

$$\begin{cases} p_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad t \longmapsto p_n(t) = t^n \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que L est libre dans X.

L étant libre infinie, X est donc de dimension infinie.

③ Espace de dimension infinie.

$X = \{(x_n)_{n\geq 1} : \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \mathbb{K}\}$, l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}$.

Posons $L = \{e_n : n \geq 1\} \subset X$, t.q

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$,
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$
$e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$
⋮

Il est facile de vérifier que L est une partie libre dans X. L étant infinie, donc X est de dimension infinie.

(IX) Une application $T : X \longrightarrow Y$ est dite linéaire si on a :

(•) $\forall x, y \in X$, $T(x+y) = Tx + Ty$,

(••) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$, $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

Ceci est équivalent à :

$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty$.

T est dit aussi, un opérateur linéaire.
Si de plus $Y = \mathbb{K}$, T est dit fonctionnelle linéaire, ou forme linéaire.

<u>Exemples</u> :

(1) Toutes les applications linéaires $T : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont de la forme suivante :

$Tx = ax$, pour tout $x \in X$,

où a est une constante dans X.

(2) Toutes les applications linéaires (ou bien formes linéaires) $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ (où $n \geq 1$) sont de la forme :

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i,$$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des constantes dans $\mathbb{K}$.

(3) Toutes les applications linéaires

$$T : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad (\text{où } n, m \geq 1)$$

sont la forme suivante

$$T(x_1, \ldots, x_m) = (T_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, T_n(x_1, \ldots, x_m))$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, où

$$T_i : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K} \quad , i = 1, \ldots, n$$

sont des formes linéaires dans $\mathbb{K}^m$

comme sont définies dans (2).

On note $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Soit $M_T = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de type $n \times m$

à coeffients dans $\mathbb{K}$, $\{e_1, \ldots, e_m\}$

la base canonique de $\mathbb{K}^m$, et $\{u_1, \ldots, u_n\}$

la base canonique de $\mathbb{K}^n$, t.q.

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \quad , j = 1, \ldots, m,$$

$$= (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \, , \, j = 1, \ldots, m$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^n$.

Donc $x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$, et alors

$$y = Tx = \sum_{j=1}^{m} x_j Te_j \quad \text{(car } T \text{ linéaire),}$$

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right)$$

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) u_i$$

Alors $$y^T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = M_T \cdot x^T,$$

où $$x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$ (transposé de $x = (x_1, \dots, x_m)$)

M_T est dite matrice de T associée aux deux bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{K}^m$, et $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{K}^n$.

<u>Application</u> : $n = 2$, $m = 3$

et $T(x_1, x_2, x_3) = \cancel{(2x_1 - 3x_2, 3x_1 - 5x_2)}$

$= (2x_1 - 3x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 - 2x_3)$.

Trouver M_T ? (exercice).

(4) $T : C_{\mathbb{K}}[0,1] \longrightarrow C_{\mathbb{K}}[0,1]$

$f \longmapsto Tf$

t-q : $\forall t \in [0,1], \ (Tf)(t) = t f(t)$.

Vérifier que T est linéaire ? (exercice)

(On peut définir T sur $C_{\mathbb{K}}[a,b]$ d'une manière générale).

§2. Notions utiles d'Analyse fonctionnelle

Dans tout ce qui suit, X désignera un espace normé sur $\mathbb{K}$, et $\|\cdot\|$ est la norme sur X.

La norme $\|\cdot\|$ sur X est défini par :

(N1) $\forall x \in X, \ \|x\| \geq 0$, (positivité),

(N2) $\forall x \in X, \ \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$,

(N3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(N3) $\forall x, y \in X, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire).

Propriétés qui ont découlé des axiomes (N1) – (N4) :

(1) $\|0\| = 0$,

(2) $\forall x, y \in X, \; \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(Exercice).

<u>Suites convergentes – suites bornées.</u>

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dans X, $x \in X$.

(•) On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x, et on note $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \; \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Ceci est équivalent à $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

(••) On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, s'il existe une constante $k > 0$ vérifiant :

$\forall n \geq 1, \; \|x_n\| \leq k$.

(•••) Toute suite dans X convergente est bornée, mais la réciproque est fausse, en général.

(.....) On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, si on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n, m \geq N, \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

(......) Toute suite dans X convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse, en général.

(.......) Toute suite de Cauchy dans X est bornée dans X

(________) Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy possédant une sous-suite convergente vers un vecteur $x \in X$, alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est ~~de~~ convergente, et converge vers x.

(________) X est dit un espace normé complet, ou un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

($\longleftarrow$) Si X est de dimension finie, alors X est de Banach.

Exemples d'espaces normés

Exemple 1 : soit $p \in [0, \infty[$, ~~et~~ $n \geq 1$.

On définit sur $\mathbb{K}^n$, la norme $\|\cdot\|_p$ par

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$;

appelée p-norme sur $\mathbb{K}^n$.

$\mathbb{K}^n$ étant de dimension finie, donc $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_p$ est de Banach.

Lorsque $p = 2$, $\|\cdot\|_2$ est dite la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$

Exemple 2. On définit sur $\mathbb{K}^n$ $(n \geq 1)$ la norme suivante :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach.

Exemple 3 : Soit $p \in [1, \infty[$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

On définit sur $C_{\mathbb{K}}[a,b]$, la norme suite $\|\cdot\|_p$ donnée par

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C_{\mathbb{K}}[a,b]$$

appelée, p-norme sur $C_{\mathbb{K}}[a,b]$.

$\left(C_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_p\right)$ n'est pas complet, i.e : n'est pas un Banach.

Exemple 4 : On définit sur $C_{\mathbb{K}}[a,b]$, la norme suivante :

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad f \in C_{\mathbb{K}}[a,b].$$

$\left(C_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_\infty\right)$ est un Banach.
$\|\cdot\|_\infty$: la norme uniforme sur $C_{\mathbb{K}}[a,b]$.

Théorème de Stone _ Weirstrass :

Soit $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}[a,b]$, le sous-espace vectoriel de toutes les fonctions polynomials $p : [a,b) \longrightarrow \mathbb{K}$

~~Alo~~ On munit $C_{\mathbb{K}}[a,b]$, de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}[a,b]$ est dense dans $C_{\mathbb{K}}[a,b]$.

Autrement, pour tout $f \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$, il existe une suite $\{p_n\}_{n\geq 1}$ de fonctions polynomials dans $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}[a,b)$, t.q. $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$,

$$\|p_n - f\|_\infty \longrightarrow 0,$$

i.e : (Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, est limite uniforme de suites de fonctions polynomials $p_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$)

Normes equivalentes

Soit $N(\cdot)$, une deuxième norme sur X. On dit que $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sont equivalentes, s'il existe deux

deux constantes $\alpha, \beta > 0$ vérifiant :

$\forall x \in X, \quad \alpha N(x) \leq \|x\| \leq \beta N(x)$.

__Proposition__ : Si X est de dimension finie, alors toutes les normes sur X sont équivalentes.

__Exercice__ (à vérifier)

La norme $\|\cdot\|_1$ (ou bien $\|\cdot\|_2$) et la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $C_{\mathbb{K}}[0,1]$ ne sont pas équivalentes.

__Remarque__ : si $N(\cdot)$ est une deuxième norme sur X, ~~alors (i)~~ telle que $N(\cdot)$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, alors on a : $(X, \|\cdot\|)$ est un Banach si et seulement si $(X, N(\cdot))$ est un Banach.

Si on applique cette remarque à l'exercice précédent :

Comme $(C_{\mathbb{K}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach, et $(C_{\mathbb{K}}[0,1], \|\cdot\|_1)$ n'est pas un Banach, alors les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.