Chapitre 1. Opérateurs linéaires bornés

Notons que la notion des opérateurs linéairs bornés sur des espaces normés ~~est~~ représente l'extension de la notion de l'analyse matricielle qui s'effectue en dimension finie.

§1 - Norme d'un opérateur.

Dans tout ce qui suit, E et F désignerons deux espaces normés sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Dans le corps $\mathbb{K}$, tout scalaire λ possède un module, $|\lambda|$.

Dans l'espace normé E, tout vecteur x possède une norme, $\|x\|$.

Dans ce §, on va associé à un opérateur linéaire $T: E \longrightarrow E$ vérifiant une certaine condition, une norme, $\|T\|$.

Cette condition est donné dans la définition suivante.

<u>Définition 1</u> : Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E \ , \ \|Tx\| \leq M \|x\| .$$

<u>Exemples</u> :

① $E = F = \mathbb{K}$, $T : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto Tx = ax$

(où a est une constante dans $\mathbb{K}$).

La norme de $\mathbb{K}$ est le module $|\cdot|$.

Pour $x \in \mathbb{K}$, on a $|Tx| = |a.x| = |a|.|x|$.

Il suffit de prendre $M = |a|$.

T est donc borné.

② $E = \mathbb{K}^n$ $(n \geq 1)$, $F = \mathbb{K}$, $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$E = \mathbb{K}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

On note par $\|\cdot\|_1$ la norme usuelle de $\mathbb{K}^n$. Donc $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes (car $\mathbb{K}^n$ de dimension finie). (La norme de $F = \mathbb{K}$ est $|\cdot|$).

($a_1, \dots, a_n$: constantes dans $\mathbb{K}$)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$|Tx| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i||x_i|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)\|x\|_1 \longrightarrow (*)$$

D'autre part, comme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, il existe alors une constante $\alpha > 0$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 \leq \alpha \|x\| \ (**)$$

De $(*)$ et $(**)$, on tire :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad |Tx| \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)\|x\|$$

Il suffit de prendre $M = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)$.

T est donc borné.

Il faut remarquer que T est borné par rapport à toute norme sur $\mathbb{K}^n$.

③ $E = C_{\mathbb{K}}[a, b]$, $F = \mathbb{K}$, et

$$T : E \longrightarrow F, \ f \longmapsto Tf = \int_a^b f(t)\,dt.$$

On munit E de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et $F = \mathbb{K}$ de la norme $|\cdot|$.

Il est clair que T est linéaire.

Soit $f \in E$. On a donc :

$$|Tf| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_a^b \sup_{a \le t \le b} |f(t)|\,dt = \|f\|_\infty (b-a).$$

Il suffit de prendre $M = b-a$.

T est donc borné.

(4) $E = C_{\mathbb{K}}[a,b]$, $F = \mathbb{K}$, et

$$T : E \longrightarrow F,\ f \longmapsto Tf = \int_a^b f(t)\,dt$$

On munit E de la norme usuelle $\|\cdot\|_1$,

et on munit $F = \mathbb{K}$ de $|\cdot|$.

T est le même opérateur que dans (3).

Soit $f \in E$. On a donc :

$$|Tf| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt = \|f\|_1.$$

$$\cancel{\le \left(\int_a^b 1^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a\right)}$$

Il suffit de prendre $M = 1$.

T est donc borné.

⑤ Prendre le m̂. exemple (4), avec

E munit de la norme $\|\cdot\|_2$, $F = \mathbb{K}$

de la norme $|\cdot|$.

Soit $f \in E$. On a alors

$$|Tf| \leq \int_a^b 1 . |f(t)|\, dt$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int_a^b 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{b-a} \, . \, \|f\|_2 .$$

Il suffit de prendre $M = \sqrt{b-a}$.

T reste borné.

<u>Proposition 1.</u> On suppose E de dimension finie. Tout opérateur linéaire T de E dans F est borné.

<u>Preuve:</u> Soit $T : E \longrightarrow F$ un op. lin.

On suppose E de dimension n (où $n \geq 1$).

Notons que E, F sont munis de normes arbitra(ires) (notées $\| \cdot \|$ dans chaque cas).

Montrons T borné?

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Pour chaque $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ t.q.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad ; \text{ et on note}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

Il est facile de vérifier que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E. (Exercice).

~~On a~~ E étant de dimension finie,

donc les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ dans E sont equivalentes. Il existe alors une constant $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E \ , \ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\| .$$

Posons $k = \max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\|$.

Maintenant, soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i Te_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|Te_i\|$$

$$\leq k \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)$$

$$= k \|x\|_1$$

$$\leq (\alpha k) \|x\| .$$

Prende $M = \alpha k$. Donc T est borné.

<u>Remarque.</u> ① De la proposition précédente, on tire que si l'espace de départ E est dimension finie, alors tout opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est déclaré borné d'avance.

② Dans le cas où E est dimension infinie, y-a-t-il des opérateurs linéaires $T : E \longrightarrow F$ non bornés ? la réponse est oui comme le montre l'exemple suivant.

Exemple d'opérateur linéaire non borné.

On prend $E = \mathcal{P}_{\mathbb{K}}[a,b]$, le s.e.v. de $C_{\mathbb{K}}[0,1]$, des fonctions polynomiales $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$.

On munit E de la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

Soit $T : E \longrightarrow E$, $p \longmapsto p' = \frac{dp}{dt}$.

~~Pour chaque entier n, so~~ T est linéaire.

Pour chaque $n \geq 1$, soit $p_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}, t \longmapsto t^n$.

Il est clair que, $p_n \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}[0,1]$, pour $n \geq 1$;

et $\|p_n\|_\infty = 1$, pour $n \geq 1$,

De plus, $\|Tp_n\|_\infty = \|p_n'\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |n t^{n-1}| = n$,

pour tout $n \geq 1$.

Par l'absurde, supposons T borné.

Il existe alors une constante $M \geq 0$ vérifiant :

$$\forall p \in E, \quad \|Tp\|_\infty \leq M \|p\|_\infty .$$

D'où alors

$$\forall n \geq 1, \quad \|Tp_n\|_\infty \leq M \|p_n\|_\infty .$$

i.e :

$$\forall n \geq 1, \quad n \leq M .$$

Ceci donne que $\mathbb{N}^*$ est majoré.

Ce qui est impossible.

Donc T est non borné :

L'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ est linéaire ~~est~~ non borné dans E.

Proposition 2. Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) T borné ; (ii) T Lipschitzien ; (iii) T uniformement continue ; (iv) T continue ; (v) T continue en un certain $a \in E$; (vi) T continue en 0.

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? Supposons (i) vraie. Montrons (ii) ? Il existe alors une constante $M \geq 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E \;,\; \|Tx\| \leq M \|x\| \quad (*)$$

Soit $x, y \in E$. On alors :

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \|T(x-y)\| \quad (T \text{ linéaire}) \\ &\leq M \|x-y\| \quad (\text{d'après } (*)). \end{aligned}$$

Ceci montre (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ? Ceci découle du fait que toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) ? Ceci découle du fait que toute fonction unif. cont. est cont.

(iv) $\Rightarrow$ (v) ? Trivial.

$(v) \Rightarrow (vi)$? Supposons (v) vraie.

Montrons (vi)? Il existe $a \in E$ tel que T continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ t.q.

$(*)$. $\forall x \in E, \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Ta\| < \varepsilon$

Soit $x \in E$ vérifiant : $\|x\| < \delta$.

Posons $x' = x + a$. On a donc : $\|x' - a\| = \|x\| < \delta$

De $(*)$, on tire $\|Tx' - Ta\| < \varepsilon$.

D'où $\|Tx\| = \|T(x' - a)\| = \|Tx' - Ta\| < \varepsilon$.

On a donc montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < \varepsilon.$$

T est donc montrer que T est continue en 0.

$(vi) \Rightarrow (i)$? Supposons (vi) vraie.

Montrons (i)? Prendre dans la définition de la continuité de T en 0, $\varepsilon = 1$.

Il existe alors une constante $\delta > 0$ t.q.

$(*)$: $\forall x \in E, \|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On pose $x' = \frac{\delta}{2\|x\|} x$.

Donc $x' \in E$ et $\|x'\| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

De $(*)$, on tire : $\|Tx'\| < 1$.

D'où alors $\|Tx\| < \frac{2}{\delta} \|x\|$.

On a donc :

$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\|Tx\| < \frac{2}{\delta} \|x\|$.

D'où alors :

$\forall x \in E$, $\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$.

Prendre $M = \frac{2}{\delta}$, et on a donc

T est borné.

<u>Notation</u> : On note $B'_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$,

la boule unité fermée de E,

$B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$,

la boule unité ouverte de E,

$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$,

la sphère unité de E.

<u>Proposition 3.</u> Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) T borné ; (ii) L'image de tout borné de E est un borné de F ; (iii) $T(B'_E)$ est un borné de F.

<u>Preuve.</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? Supposons (i) vraie.
Montrons (ii) ? Soit A une partie bornée de E
Il suffit de montrer que $T(A)$ est borné dans F ?
Il existe alors une constante $k \geq 0$ t.q.

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq k \quad (1)$$

De plus, T étant borné, il existe alors une constante $M \geq 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|Tx\| \leq M\|x\| \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire :

$$\forall x \in A, \quad \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ (d'après (2))}$$
$$\leq kM \text{ (d'après (1))}$$

$T(A)$ est donc borné dans F.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)? Ceci découle directement du fait que B'_E est une borné dans E.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)? Supposons (iii).

Montrons (i)?

Il existe alors une constante $k \geq 0$ t.q.

$$\forall x \in B'_E, \quad \|Tx\| \leq k \quad \text{— } (*).$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $x' = \frac{1}{\|x\|} x$.

Donc $x' \in E$ et $\|x'\| = 1$.

D'où $x' \in B'_E$, et donc $\|Tx'\| \leq k$.

Ceci montre que : $\|Tx\| \leq k\|x\|$.

On a donc montrer que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \|Tx\| \leq k\|x\|$$

Ceci montre que :

$$\forall x \in E, \quad \|Tx\| \leq k\|x\|.$$

T est donc borné.