Les projecteurs — Chapitre 1

§1 - Cadre algébrique

Dans tout §, E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), M et N désignerons deux s.e.v. de E t-q.

$$E = M \oplus N \quad \text{(S.D. Algébrique)}.$$

__Notation__ : Pour chaque $x \in E$, on note par (x_M, x_N) le couple unique de $M \times N$, vérifiant : $x = x_M + x_N$.

Soit $\begin{cases} P_M : & E \longrightarrow E \\ & x \longmapsto P_M x = x_M, \end{cases}$

et $P_N : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto P_N x = x_N. \end{array}$

Il est facile de voir que:

(i) P_M et P_N sont linéaire,

(ii) $P_M^2 = P_M$, $P_N^2 = P_N$,

(iii) $P_N = I - P_M$,

(iv) $R(P_M) = M$, $R(P_N) = N$,

v) $\ker P_M = N$, $\ker P_N = M$,

vi) $\forall x \in E$, $(x \in M) \Longleftrightarrow (x = P_M x)$.

Inversement, soit $P : E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant $P^2 = P$.

A vérifier que :

(i) $E = R(P) \oplus \ker P$ est une S.D.Alg.,

(ii) Si on pose $M = R(P)$, $N = \ker P$, alors $P = P_M$.

<u>Définition</u> : Un opérateur linéaire $P : E \longrightarrow E$ est dit un projecteur s'il vérifie $P^2 = P$.

<u>Remarque:</u> A toute somme directe de $E = M \oplus N$, correspond un projecteur P_M, où $M = R(P_M)$ et $N = \ker P_M$; inversement, à tout projecteur $P : E \longrightarrow E$ correspond une somme directe algébrique $E = M \oplus N$ t.q. $P = P_M$, $R(P) = M$, $\ker P = N$.

Un tel opérateur $P \in L(E)$, est dit :
le projecteur de E sur $M // \bar{a}\ N$,
et on dit aussi que P est un projecteur
de l'algèbre $L(E)$.

Posons $Q = I - P$.

Donc $Q = P_N$, est le de projecteur
de E sur $N // \bar{a}\ M$.

On dit que P et Q sont deux
projecteurs complémentairs : $P + Q = I$.

Exemples

① O et I sont deux projecteurs
complémentairs de $L(E)$, car
$O^2 = O$, $I^2 = I$, $O + I = I$.
Dans ce cas : $E = E \oplus \{0\}$,
et $I = P_E$, $O = P_{\{0\}}$.

② Prenons : $E = \mathbb{K}^2$, $M = \mathbb{K} \times \{0\}$, $N = \{0\} \times \mathbb{K}$

Soit $$P_1 : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, 0).$$

Donc P_1 est un projecteur de $L(\mathbb{K}^2)$,

et $R(P_1) = M = \mathbb{K} \times \{0\}$, $\ker P_2 = N = \{0\} \times \mathbb{K}$

où $\mathbb{K}^2 = M \oplus N$.

le projecteur complémentaire de P_1 relativement à cette décomposition est

$$P_2 : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (0, x_2).$$

(3) $E = \mathbb{K}^3$, $M = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}$, $N = \{0\} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Soit
$$P : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0, 0)$$

$$Q : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (0, x_2, x_3)$$

P et Q deux ~~pro~~ projecteurs complémentaires de $L(\mathbb{K}^3)$.

(4) $E = \mathbb{K}^3$,
$$P_1 : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0, 0),$$

$$P_2 : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (0, x_2, 0)$$

$$P_3 : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (0, 0, x_3)$$

P_1, P_2, et P_3 sont 3 projecteurs de $L(E)$ vérifiant $P_1 + P_2 + P_3 = I$.

Chaque somme de deux projecteurs de P_1, P_2, P_3 est un projecteur de $L(E)$

(S) ~~$E = \mathbb{K}^n$~~ Posons $M_1 = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}$,

$M_2 = \{0\} \times \mathbb{K} \times \{0\}$, $M_3 : \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{K}_3$.

On a donc $P_i = P_{M_i}$, $i = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{K}^3 = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \quad \text{S.D.A.}$$

§2. Cadre Analyse : Projecteurs bornés.

Dans ce §, E désignera un espace normé sur $\mathbb{K}$.

Proposition ~~Définition~~ : Soit X, Y deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

l'application
$$X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

est une norme sur $X \times Y$: appelée norme produit.

Preuve : Exercice.

Définition : Soit X, Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. On appelle graphe de f, le sous-ens. de $X \times Y$ donné par :

$$Gr f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Proposition (Théorème du graphe fermé) : Soit X, Y deux Banach sur $\mathbb{K}$, et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors, T est borné ssi T est de graphe fermé dans $X \times Y$ muni de la norme produit.

Preuve : Voir Cours A. F.

Proposition : Soit P un projecteur de $L(E)$. Si P est borné, alors $R(P)$ est fermé.

Preuve : Supposons P projecteur borné.

Montrons $R(P)$ fermé ?

Soit $y \in \overline{R(P)}$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans E t.q. $Px_n \longrightarrow y$.

Comme P est borné, donc

$$Px_n = P^2 x_n = P(Px_n) \longrightarrow Py = y.$$

Alors $y \in R(P)$. Donc $\overline{R(P)} = R(P)$.

$R(P)$ est donc fermé.

Définition : Soit F, G deux sev. de E t.q.

$E = F \oplus G$: S.D.A.

Cette somme directe algébrique (S.D.A)

$E = F \oplus G$ est dite une somme directe topologique (S.D.T)

si on a :

① F et G fermés,

② Le projecteur P_F est borné.

Remarque: Soit P un projecteur borné dans E. Posons $M = R(P)$, $N = \ker P$. Alors la somme directe $E = M \oplus N$ est topologique

Car :

(·) $M = R(P)$ est fermé, (voir Proposition précédente).

(··) $N = \ker P$ est fermé, car P borné.

(···) $P = P_M$ est borné.

Proposition : On suppose E Banach, F, G deux s.e.v. de E t.q. $E = F \oplus G$.

Alors la somme directe $E = F \oplus G$ est topologique ssi F et G sont fermés.

Preuve.

Il est clair que si $E = F \oplus G$ est topologique, alors F, G sont fermés.

Réciproquement, supposons F, G fermés. Montrons que $E = F \oplus G$ topo. ?

Reste seulement à vérifier que $P = P_F$ est borné ?

On utilisera ici, le Théo. du graphe fermé

On a $Gr\,P = \{(u+v, u) : u \in F, v \in G\}$

Il suffit de montrer que $Gr\,P$ est fermé dans E^2

Soit $\{u_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans F, $\{v_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans G, $(x,y) \in F \times G$, t.q: $(u_n + v_n, u_n) \longrightarrow (x,y)$.

Alors $u_n + v_n \longrightarrow x$ et $u_n \longrightarrow y$.

Comme $u_n \in F$, pour tout $n \geq 1$, ~~est~~ F fermé, donc $y \in F$. D'où $v_n = (u_n + v_n) - u_n \longrightarrow x - y$

Comme $v_n \in G$, pour tout $n \geq 1$, et G fermé, alors $x - y \in G$ (où $G = \ker P$).

Alors $0 = P(x-y) = Px - Py = Px - y$, car $y \in R(P)$, et $R(P) = F$.

D'où alors $y = Px$, et donc $(x, y) \in Gr\, P$.

Donc le graphe de P est fermé.

Par conséquent, P est borné.

§3 _ Projecteur orthogonal :

Dans tout ce qui suit, H désignera un espace d'Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition : Soit M un sous-espace de H (i.e. M s.e.v. fermé) et soit la S.D.⊥. $H = M \oplus M^{\perp}$.

Alors le projecteur $P = P_M$ de H sur M // à $M^{\perp}$ est dit le projecteur orthogonal de H sur M.

Il est clair que ce projecteur est borné. En effet,

Méthode directe : ~~Méthode directe~~ Soit $x \in H$.

~~Donc~~ $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$.

Alors $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2$,

ceci montre que $\|Px\| = \|x_1\| \leq \|x\|$.

<u>2ème méthode</u> : H Banach, M et $M^\perp$ sont fermés fermés, donc la somme directe $H = M \oplus M^\perp$ est topologique. Par conséquent le proj. $P = P_M$ est borné.

<u>Proposition</u> : Soit P un projecteur borné de B(H). Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) P est un projecteur orthogonal,

(ii) P^* est auto-adjoint.

<u>Preuve:</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? Supposons (i) vrai.

Posons $M = R(P)$, $N = M^\perp$.

$H = M \oplus M^\perp$ s.d. $\perp$.

$P = P_M$.

On a alors

Montrons que P est auto-adjoint ?

En effet, soit $x \in H$. Alors $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, et donc

$$\langle Px, x\rangle = \langle x_1, x_1 + x_2\rangle,$$
$$= \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle,$$
$$= \|x_1\|^2.$$

Donc $\langle Px, x\rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in H$.

P est donc auto-adj.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)? Supposons P auto-adjoint.

Montrons que P est orthogonal?

Posons $M = R(P)$ (M est fermé).

Donc $N = \ker P = R(P)^{\perp}$ (car $P^* = P$),

Alors $H = M \oplus N$, où $N = M^{\perp}$,

et donc $P = P_M$ est orthogonal.

<u>Remarque:</u> Soit $P \in B(H)$. Alors

P est un projecteur orthogonal ssi

$P^2 = P = P^*$.