Chapitre 1. Suites Noyaux et Images

§1 _ Généralités :

Soit X un ensemble non vide, et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X.

On dit que cette suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire s'il existe un entier $N \geq 0$ vérifiant :

(*) $\forall n \geq N, \; x_n = x_N$;

autrement, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ deviendra constante à partir d'un certain rang N.

Si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire, on appelle alors le rang de cette suite, le plus petit entier $N \geq 0$ vérifiant (*).

Il est clair ~~que~~, que le rang d'une suite stationnaire est $N = 0$ ssi cette suite est constante.

§2 - Suite Noyaux - Images : cadre algébrique.

Dans tout §, E désignera un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et on note par $T : E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire.

On note par :

(o) $\ker T = \{x \in E : Tx = 0\}$, le noyau de T,

(oo) $R(T) = \{Tx : x \in E\}$, l'image de T.

(ooo) $T^0 = I$.

Il est clair que, T est bijectef ssi $\ker T = \{0\}$, $R(T) = E$

Proposition 1 : On a les propriétés suivantes :

1. La suite noyaux $\{\ker T^n\}_{n \geq 0}$ est croissante, i.e : $\forall n \geq 0$, $\ker T^n \subset \ker T^{n+1}$.
2. La suite images $\{R(T^n)\}_{n \geq 1}$ est decroissante i.e. $\forall n \geq 0$, $R(T^n) \supset R(T^{n+1})$.

Preuve : Facile (Exercice).

<u>Proposition 2</u>, s'il existe un entier $p \geq 0$ vérifiant $\ker T^p = \ker T^{p+1}$, alors on a :

$$\forall n \geq p, \quad \ker T^n = \ker T^p,$$

autrement, la suite noyaux associée à T deviendra constante à partir du rg p.

<u>Preuve :</u> Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$, vérifiant $\ker T^p = \ker T^{p+1}$.

Montrons alors que :

$$\forall n \geq 0, \quad \ker T^{p+n} = \ker T^p \quad (*).$$

On utilisera, pour cela, le raisonnement par récurrence.

Il est clair que $(*)$ est vérifiée pour $n = 0$

Supposons que $(*)$ est vérifiant jusqu'à l'ordre n (où $n \geq 0$)

Montrons que $(*)$ est vérifiée à l'ordre $n+1$

On a alors $\ker T^{p+n} = \ker T^p$ —— $(**)$,

Montrons donc $\ker T^{p+n+1} = \ker T^p$?

Comme la suite noyaux associée à T est $\nearrow$,
il suffit donc de montrer seulement que :

$$\ker T^{p+n+1} \subset \ker T^{p} \; ?$$

Soit $x \in \ker T^{p+n+1}$.

Alors $T^{p+n}(Tx) = T^{p+n+1}x = 0$.

D'où $Tx \in \ker T^{p+n}$. ~~Or~~ $\cancel{\ker T^{p+1} = \ker T^{p}}$,

donc $Tx \in \ker T^{p}$, d'après (**).

Autrement, $T^{p+1}x = 0$.

Et comme $\ker T^{p} = \ker T^{p+1}$, donc $T^{p}x = 0$.

Ceci montre que $x \in \ker T^{p}$. c.q.f.d.

<u>Proposition 3.</u> S'il existe un entier $p \geq 0$ vérifiant $R(T^{p}) = R(T^{p+1})$, alors :

$$\forall n \geq p, \quad R(T^{n}) = R(T^{p}).$$

Preuve : Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$ vérifiant : $R(T^p) = R(T^{p+1})$.

Montrons que :

(*) $\forall n \geq 0$, $R(T^{p+n}) = R(T^p)$?.

On utilisera ici aussi le raisonnement par recurrence.

La propriété (*) est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons que (*) est vérifiée jusqu'à l'ordre n (où $n \geq 1$) ; et montrons que (*) restera vraie pour $n+1$?

On a donc $R(T^{p+n}) = R(T^p)$ (**)

Montrons alors que $R(T^{p+n+1}) = R(T^p)$?

La suite image associée à T étant décroissante, il suffit seulement de prouver que $R(T^p) \subset R(T^{p+n+1})$?

Soit $y \in R(T^p)$. D'après (**), $y \in R(T^{p+n})$.

Il existe alors $x \in E$ t.q. $y = T^{p+n}x$ — (1).

Or $R(T^{p+1}) = R(T^p)$, il existe alors

$x' \in E$ t.q. : $T^p x = T^{p+1}x'$ — (2).

De (1) et (2), on tire $y = T^{p+n+1}x'$.

Donc $y \in R(T^{p+n+1})$, c.q.f.d.

<u>Notations :</u> On note par :

(•) $a(T) = \inf\{n \geq 0 : \ker T^n = \ker T^{n+1}\}$

(••) $d(T) = \inf\{n \geq 0 : R(T^n) = R(T^{n+1})\}$.

Avec la convention : $\inf \phi = \infty$.

<u>Remarque :</u> Vue des deux propositions précédentes.

(1) $a(T) < \infty$ ssi la suite noyaux est stationnaire.

(2) $d(T) < \infty$ ssi la suite image est stationnaire.

(3) $a(T) = \infty$ ssi $\ker T^n \subsetneq \ker T^{n+1}$, pour tout $n \geq 0$.

(4) $d(T) = \infty$ ssi $R(T^n) \supsetneq R(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$.

<u>Définition</u> : (1) $a(T)$ est appelé, l'ascente de T.

(2) $d(T)$ est appelé, la déscente de T.

<u>Proposition 4</u> : Si $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$, alors $a(T) = d(T)$.

<u>Preuve</u> : Il est facile de verifier que

$$\begin{cases} (\circ)\ a(T) = 0 \text{ ssi } T \text{ injectif}, \\ (\circ\circ)\ d(T) = 0 \text{ ssi } T \text{ surjectif}. \end{cases}$$

Supposons $\overset{a=}{a(T)} < \infty$ et $\overset{d=}{d(T)} < \infty$.

Montrons alors $a = d$?

On montrera ça en deux étapes.

<u>Etape 1</u>: On suppose $d = 0$; et on montre $a = 0 = d$?

Comme $d = 0$, donc T est surjectif.

Par l'absurde, supposons $a \neq 0$ (donc $a > 0$).

Alors T est non injectif.

Il existe alors $x_1 \in E$ t.q, $Tx_1 = 0$, $x_1 \neq 0$.

Comme T est surjectif, il existe alors

$x_2 \in E$ t.q. $x_1 = Tx_2$.

Donc $0 = Tx_1 = T^2 x_2$, et $Tx_2 \neq 0$.

De même, il existe $x_3 \in E$ t.q. $x_2 = Tx_3$.

Donc $0 = T^2 x_2 = T^3 x_2$, et $T^2 x_3 \neq 0$.

Par iteration, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans E vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \in \ker T^n \setminus \ker T^{n-1}.$$

Ceci montre que :

$$\forall n \geq 0, \quad \ker T^n \subsetneq \ker T^{n-1}.$$

D'où alors $a = \infty$. Contradiction avec : $a < \infty$.

Par conséquent $a = 0 = d$.

<u>Etape 2</u>. Cadre général.

Posons $\tilde{E} = R(T^d)$.

On définit l'opérateur : $\tilde{T} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}$ par :

$$\forall x \in \tilde{E}, \quad \tilde{T}x = Tx.$$

(1) Montrons d'abord que $\tilde{T}$ est défini ?

Ceci revient à montrer que :

$$\forall x \in \tilde{E}, \quad Tx \in \tilde{E} ?$$

Soit $x \in \tilde{E}$. Il existe alors $x' \in E$

t.q. $\quad x = T^d x'$.

Donc $\quad Tx = T(T^d x') = T^{d+1} x'$.

Or $R(T^{d+1}) = R(T^d)$, donc $Tx \in \tilde{E}$.

(2) $\tilde{T}$ est linéaire ? Facile à vérifier.

(3) $\tilde{T}$ est surjectif ? En effet,

Soit $y \in \tilde{E}$. Comme $\tilde{E} = R(T^d) = R(T^{d+1})$,

il existe alors $x \in E$ t.q. $y = T^{d+1}x$.

Donc $\quad y = Tx'$, où $x' = T^d x \in \tilde{E}$.

~~Aa~~ D'où $\quad y = \tilde{T}x'$, où $x' \in \tilde{E}$.

Donc $\tilde{T}$ est surjectif. Alors $d(\tilde{T}) = 0$.

Soit maintenant un entier naturel p.

vérifiant : $p \geq a - d$.

On a donc $p + d \geq a$. D'où alors :

$$\ker \tilde{T}^p = \{T^d x : x \in E, \tilde{T}^p(T^d x) = 0\}$$

$$= \{T^d x : x \in E, T^p(T^d x) = 0\}$$

$$= \{T^d x : x \in E, T^{p+d} x = 0\}$$

$$= \{T^d x : x \in E, T^{p+d+1} x = 0\}$$

$$= \ker \tilde{T}^{p+1}.$$

Ceci montre que $a(\tilde{T}) < \infty$.

On a donc : $d(\tilde{T}) = 0$ et $a(\tilde{T}) < \infty$.

En appliquant l'étape 1 avec l'espace vectoriel $\tilde{E}$ et l'opérateur $\tilde{T}$, on a

alors $a(\tilde{T}) = 0 = d(\tilde{T})$.

$\tilde{T}$ est alors bijectif, donc injectif.

On a donc

$\forall x \in E$, $T^{d+1}x = 0 \Longrightarrow T^d x = 0$.

Ceci montre que $\ker T^d = \ker T^{d+1}$.

On a donc $a \leq d$.

Reste à montrer que $d \leq a$?

Si $d = 0$, alors $a = 0$ (d'après l'étape 1).

Supposons $d \geq 1$.

Comme $R(T^{d-1}) \supsetneq R(T^d)$, il existe

alors $y \in R(T^{d-1})$ et $y \notin R(T^d)$.

Posons $y = T^{d-1}x$, pour un certain $x \in E$,

et $z = Ty = T^d x$. Donc $z \in R(T^d)$,

et $R(T^d) = R(T^{2d})$, alors

$z = T^d w$, pour un certain $w \in R(T^d)$

Posons $u = x - w$. On a alors :

$T^d u = T^d x - T^d w = 0$, et

$$T^{d-1}u = T^{d-1}x - T^{d-1}w$$

$$= y - T^{d-1}w$$

Comme $y \notin R(T^d)$ et $T^{d-1}w \in T^{d-1}(R(T^d))$,

alors $y \notin R(T^d)$ et $T^{d-1} \in R(T^{2d-1})$.

Or $R(T^d) = R(T^{2d-1})$, donc :

$y \notin R(T^d)$ et $T^{d-1} \in R(T^d)$.

D'où alors $T^{d-1}u \neq 0$.

Et comme $T^d u = 0$, donc $\ker T^{d-1} \subsetneq \ker T^d$,

Ceci montre que $a \geq d$.

Par conséquent, $a = d$. c.q.f.d.

<u>Proposition 5 :</u> Si $a(T)$ et $d(T)$ sont finis,

alors $E = \ker T^p \oplus R(T^p)$ (S.D.A)

où $p = a(T) = d(T)$.

De plus, $\tilde{T} : R(T^p) \longrightarrow R(T^p), x \mapsto Tx$

est bien défini, linéaire bijectif.

Preuve : Supposons $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$.

Alors, en vertu de la Prop. 4, $a(T) = d(T)$.

Posons alors $p = a(T) = d(T)$.

1. Montrons $E = \ker T^p + R(T^p)$?

Soit $x \in E$. Comme $R(T^{2p}) = R(T^p)$,

il existe alors $x' \in E$ t.q. $T^p x = T^{2p} x'$.

Donc $T^p(x - T^p x') = 0$.

Posons $x'' = x - T^p x'$, alors

$x'' \in \ker T^p$, et $x = x'' + T^p x'$.

Donc $E = \ker T^p + R(T^p)$.

2. Montrons $\ker T^p \cap R(T^p) = \{0\}$?

Soit $y \in \ker T^p \cap R(T^p)$.

Alors $T^p y = 0$, $y = T^p x$, pour un certain

$x \in E$. On alors $T^{2p} x = 0$. D'où :

$y = T^p x = 0$. Par conséquent,

$\ker T^p \cap R(T^p) = \{0\}$.

De (1) et (2), on tire $E = \ker T^p \oplus R(T^p)$.

3. Montrons que $\tilde{T}$ est bien défini.

Ceci découle directement puisque $R(T^p) = R(T^{p+1})$.

4. $\tilde{T}$ est injectif? En effet,

Soit $x \in R(T^p)$ t.q. $\tilde{T}x = 0$.

Il existe $x' \in E$ t.q. $x = T^p x'$.

Donc $T^{p+1}x' = 0$. D'où $T^p x' = 0$.

Alors $x = 0$. $\tilde{T}$ est donc injectif.

5. $\tilde{T}$ est surjectif? En effet,

Soit $y \in R(T^p)$. Comme $R(T^p) = R(T^{p+1})$,

il existe alors $x \in E$ t.q. $y = T^{p+1}x$.

Donc $y = T(T^p x) = \tilde{T}(T^p x)$.

$\tilde{T}$ est donc surjectif. cqfd.

<u>Remarque</u>: Si $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$, alors $\ker T^p$ et $R(T^p)$ sont invariant par T (où $p = a(T) = d(T)$).

§ 3 - Cas d'espace de Banach.

On suppose E Banach sur $\mathbb{K}$,

$T \in B(E)$ à images itérées fermées,

i.e. $R(T^n)$ fermé, pour tout $n \geq 0$.

<u>Proposition 6</u>: Si $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$,

alors $E = R(T^p) \oplus R(T^d)$ est une

somme directe topologique.

<u>Preuve.</u> D'après Prop. 5, ~~la somme~~

On a $E = \ker T^p \oplus R(T^p)$ est une

somme directe algébrique.

T^p étant borné, donc $\ker T^p$ est

un sous-espace de E,

et de plus $R(T^p)$ est aussi un

sous-espace de E, et E Banach.

Donc la somme directe $E = \ker T^p \oplus R(T^p)$

est topologique (voir Chapitre 0).