Chapitre 3. Compléments sur les opérateurs compacts.

Dans tout ce chapitre, E désignera un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et F un $2^{\text{ème}}$ Banach sur $\mathbb{K}$.

Définition 1 : (1) Une partie M de E est dite relativement compacte, si de toute suite dans M, on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

(2) Une partie M de E est dite compacte, si de toute suite dans M, on peut extraire une sous-suite convergente dans M.

Remarque 1. Si M est une partie de E, alors M est relativement compact ssi $\overline{M}$ est compacte.

Définition 2 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans E, et $x \in E$. Alors x est dite une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, s'il existe une s-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers x.

<u>Proposition 1</u> (suite sans valeur d'adhérence).

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans E et soit r une constante réelle strictement positive.

si $\|x_n - x_m\| \geq r$, pour tous $n, m \geq 1$ avec $n \neq m$, alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est ~~sans suite~~ sans valeurs d'adhérence ; autrement : $(x_n)_{n\geq 1}$ ne possède aucune s-suite convergente.

<u>Preuve:</u> Exercice (facile).

<u>Notation</u> : si $T \in B(E,F)$, on note par $rg\,T$, le rang de T, i.e: $r(T) = \dim R(T)$

(1) <u>Les Operateurs de rang 1 de $B(E,F)$:</u>

Soit ~~Pour~~ $u \in F$, $f \in E'$. On note par $u \otimes f$ (u tensor f), l'opérateur de E dans F donné par :

$$\forall x \in E, \ (u \otimes f)(x) = f(x).u \ .$$

Il clair que :

(i) $u \otimes f$ est bien défini (clair),

(ii) $u \otimes f$ est linéaire (facile à vérifier).

(iii) $u \otimes f$ borné. En effet, pour $x \in E$:

$$\|(u \otimes f)x\| = \|f(x)u\| = |f(x)| \cdot \|u\|$$
$$\leq \|f\| \cdot \|u\| \cdot \|x\| .$$

(iv) $\|u \otimes f\| = \|u\| \cdot \|f\|$. En effet,

d'après (iii), on a : $\|u \otimes f\| \leq \|u\| \cdot \|f\|$.

Il est clair que $\|u \otimes f\| = \|u\| \cdot \|f\| = 0$,

si $u = 0$.

supposons $u \neq 0$. ~~Prendre,~~

Il existe une suite normée $(x_n)_{n \geq 1}$ dans E

vérifiant : $|f(x_n)| \longrightarrow \|f\|$.

On a alors

$$\|(u \otimes f)x_n\| = |f(x_n)| \cdot \|u\| \longrightarrow \|u\| \cdot \|f\|$$

Ceci montre alors $\|u \otimes f\| = \|u\| \|f\|$.

(v). $u \otimes f = 0$ ssi $u = 0$ ou $f = 0$.

(vi) $R(u \otimes f) = sp\{u\}$, si $f \neq 0$, $u \neq 0$.

En effet, on a $R(u \otimes f) \subset sp\{u\}$, par définition. Et comme $u \neq 0$, $f \neq 0$, il existe $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) \neq 0$, et donc

Donc $(u \otimes f)(x) = f(x)\, u \neq 0$. Donc $R(u \otimes f)$ contenient un vecteur non nul.

Donc $R(u \otimes f) = sp\{u\}$.

(vii) $u \otimes f$ est un opérateur de $B(E,F)$ de rang 1, si $u \neq 0$ et $f \neq 0$,

Inversement, soit $T \in B(E,F)$ de rang 1.

Posons $R(T) = sp\{u\}$, pour un certain vecteur non nul de F.

Pour chaque $x \in E$, il existe un scalair unique λ_x vérifiant :

$$Tx = \lambda_x \cdot u .$$

On définit ainsi $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in E, \; f(x) = \lambda_x.$$

(•) f est bien défini (clair),

(••) f est linéaire (à vérifier).

(•••) f bornée. En effet, on a, pour $x \in E$:

$$\|Tx\| = |f(x)| . \|u\| \leq \|T\| . \|x\|.$$

D'où alors $\quad |f(x)| \leq \dfrac{\|T\|}{\|u\|} . \|x\|.$

(••••) $T = u \otimes f$ (clair).

(•••••) $f \neq 0$.

Conclusion : Les opérateurs T de $B(E, F)$ de rang 1 sont de la forme, $T = u \otimes f$,

où $u \in F \setminus \{0\}$,

$f \in E^* \setminus \{0\}$.

(2) Pour $u \in F$, $f \in E'$, $T \in B(F, G)$ (où G un $3^{\text{ème}}$ Banach sur $\mathbb{K}$), on a :

$$T(u \otimes f) = (Tu) \otimes f.$$

En effet, il est clair que chacun des deux opérateurs est linéaire borné de E dans G. Montrons l'égalité : On a donc :

Soit $x \in E$.

$$[T(u \otimes f)](x) = T\big((u \otimes f)(x)\big)$$

$$= T(f(x)u) = f(x)\,Tu$$

$$= [(Tu) \otimes f](x)$$

(3) Pour $u \in F$, $f \in E'$, $T \in B(G, E)$ (où G un 3^{e} Banach sur $\mathbb{K}$), on a.

$$(u \otimes f) \cdot T = u \otimes (T'f).$$

En effet, il est clair que chacun des deux opérateurs est linéaire borné de G dans F. Montrons l'égalité :

Soit $x \in G$. On a alors

$$\left[(u \otimes f)T\right](x) = u \otimes f\,(Tx) = f(Tx)\,u$$

$$= (T'f)(x) \cdot u \;=\; (u \otimes T'f)(x).$$

(4) Tout s.e.v. de E de dimension finie, possède un supplémentaire topologique dans E. En effet :

Soit M un s-e.v. de E de dimension n (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de M.

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, il existe $f_1, \dots, f_n \in E'$ vérifiant :

(•) $\|f_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$.

(••) $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

(où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ Coef. de Kronecker)

On pose $P = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$.

Il est clair que $P \in B(E)$.

D'autre part, on a :

(•) Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $Pe_j = \sum_{i=1}^{n} f_i(e_j) e_i$

$= e_j$.

$$(\bullet\bullet)\quad P^2 = P\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(e_i \otimes f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Pe_i) \otimes f_i \quad (\text{d'après } (2)),$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i, \quad (\text{d'après } (\bullet)),$$

$$= P.$$

$(\bullet\bullet\bullet)$ P est donc un projecteur de $B(E)$

$(\bullet\bullet\bullet\bullet)$ $R(P) = M$. En effet,

Par définition de P, $R(P) \subset M$.

Et comme $Pe_i = e_i$, pour $i = 1, \dots, n$,

donc $\{e_1, \dots, e_n\} \subset R(P)$.

Et alors $M \subset R(P)$.

D'où $R(P) = M$.

$(\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet)$ Prendre $N = \ker P$, un supplémentaire topologique de M dans E.

(5) Théorème de la presque-orthogonalité :

Soit G un sous-espace propre de E, et soit $y \in E \setminus G$. Il existe alors un vecteur $z \in sp\{y, G\}$ t.q. $\|z\| = 1$ et $d(z, G) \geq \frac{1}{2}$.

En effet, comme G est fermé et $y \notin G$, alors $d(y, G) > 0$. Posons $\alpha = d(y, G)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $u_0 \in G$ t.q. $\|y - u_0\| < \alpha + \varepsilon$.

Comme $\|y - u_0\| \neq 0$, posons alors $z = \frac{1}{\|y - u_0\|} \cdot (y - u_0)$.

Donc $z \in sp\{y, G\}$ et $\|z\| = 1$.

Soit maintenant $u \in G$ (arbitraire), on a alors

$$\|z - u\| = \left\| \frac{1}{\|y - u_0\|} (y - u_0) - u \right\|$$

$$= \frac{1}{\|y - u_0\|} \cdot \left\| (y - u_0) - \|y - u_0\| u \right\|$$

$$= \frac{1}{\|y - u_0\|} \cdot \left\| y - (u_0 + \|y - u_0\| u) \right\|$$

$$\geq \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \quad (\text{car } u_0 + \|y - u_0\| u \in G).$$

Il suffit de choisir $\varepsilon = \alpha$.

<u>Définition</u>. Soit $K \in B(E,F)$. K est dit compact si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans E, alors la suite $(Kx_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite convergente dans F.

<u>Proposition 2</u> : Soit $K \in B(E,F)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) K compact,

(ii) pour toute partie bornée G de E, $K(G)$ est relativement compacte dans F,

(iii) $K(B_E)$ est relativement compacte dans F.

<u>Preuve</u> : Exposé.

(6) Soit K un compact de $B(E)$. On a alors les propriétés suivantes et ceci pour tout scalaire λ non nul :

(i) $\alpha(K-\lambda I)<\infty$,

(ii) $a(K-\lambda I)<\infty$,

(iii) $R(K-\lambda I)$ est fermé,

(iv) $d(K-\lambda I)<\infty$,

(v) toute valeur spectrale non nulle de K est valeur propre d'ordre fini de K,

(vi) pour tout $r>0$, l'ensemble $\{\lambda\in\sigma(K) : |\lambda|\geq r\}$ est fini.

$\alpha(K-\lambda I)<\infty$?

<u>Preuve</u>: (i) Par l'absurde, supposons $\alpha(K-\lambda I)=\infty$.

Posons $F=\ker(K-\lambda I)$. F est donc un Banach de dimension infinie.

On choisit $e_1\in F$, avec $\|e_1\|=1$. Posons $G_1=\text{sp}\{e_1\}$.

G_1 est un sous-espace propre de F.

En utilisant le théorème de la presque-orthogonalité il existe alors un vecteur $e_2\in F\setminus G_1$ t.q.

$\|e_2\|=1$ et $d(e_2,G_1)\geq\frac{1}{2}$.

On a alors :

$\|e_2\|=1$, $\|e_2-e_1\|\geq\frac{1}{2}$, $e_1, e_2\in F$.

Posons $G_2 = sp\{e_1, e_2\}$. G_2 étant un sous-espace propre de F, utilisant une $2^{ème}$ fois le théorème de la presque $\perp$, il existe alors un vecteur $e_3 \in F \setminus G_3$ t-q. $\|e_3\| = 1$ et $d(e_3, G_2) \geq \frac{1}{2}$.

$\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|e_3 - e_2\| \geq \frac{1}{2}$, $e_1, e_2, e_3 \in H$.

H étant de dimension infinie, alors par itération on peut construire une suite normée $\{e_n\}_{n \geq 1}$ dans F vérifiant $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, pour tous $n, m \geq 1$ avec $n \neq m$.

Or $Ke_n = \lambda e_n$, pour tout $n \geq 1$, et $\lambda \neq 0$, on a alors : $\|Ke_n - Ke_m\| = |\lambda| . \|e_n - e_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0$ pour tous $n, m \geq 1$ avec $n \neq m$.

En utilisant Prop. 1, la suite $\{Ke_n\}_{n \geq 1}$ est sans s-suites convergentes. Ceci contredit, la compacité de K, car $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une suite bornée.

Par conséquent, $\alpha(K - \lambda I) < \infty$.

(ii) $a(K - \lambda I) < \infty$?

Par l'absurde, supposons $a(K - \lambda I) = \infty$; autrement, $\ker(K - \lambda I)^n \subsetneq \ker(K - \lambda I)^{n+1}$, pour tout $n \geq 0$ (*)

Posons $H_n = \ker(K-\lambda I)^n$, $n \geq 0$.

On choisit $e_1 \in H_1$ t.q. $\|e_1\| = 1$, ceci est possible, car $H_0 = \{0\} \subsetneq H_1$.

Comme H_1 est un sous-espace propre de H_2, alors à partir du théorème de la presque-$\perp$, il existe un vecteur $e_2 \in H_2 \setminus H_1$ vérifiant : $\|e_2\| = 1$ et $d(e_2, H_1) \geq \frac{1}{2}$.

De même, comme H_2 est un sous-espace propre de H_3, il existe un vecteur $e_3 \in H_3 \setminus H_2$ t.q. $\|e_3\| = 1$ et $d(e_3, H_2) \geq \frac{1}{2}$.

Donc, à partir de $(*)$, on peut construire une suite normée $\{e_n\}_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \quad e_n \in H_n, & \text{—— (1)} \\ \forall n \geq 1, \quad d(e_n, H_{n-1}) \geq \frac{1}{2} & \text{—— (2)} \end{cases}$$

A partir de (1), on tire :

$\forall n \geq 1$, $(K-\lambda I)^n e_n = 0$ —— (3).

Soit $n, m \geq 1$ t.q. $m > n$. On a donc :

$$\|Ke_m - Ke_n\| = \|\lambda e_m + (K-\lambda I)e_m - Ke_n\| - (4).$$

Il est clair que $(K-\lambda I)e_m \in H_{m-1}$.

Comme $m > n$, donc $m-1 \geq n$, et alors $H_n \subseteq H_{m-1}$. D'où $e_n \in H_{m-1}$, et donc :

$$(K-\lambda I)^{m-1}(Ke_n) = K(K-\lambda I)^{m-1}e_n = 0.$$

Ceci prouve que $Ke_n \in H_{m-1}$.

Posons $u = Ke_n - (K-\lambda I)e_m$.

Alors $u \in H_{m-1}$, et d'après (4):

$$\begin{aligned}\|Ke_m - Ke_n\| &= \|\lambda e_m - u\| \\ &= |\lambda| . \|e_m - \tfrac{1}{\lambda}u\| \\ &\geq |\lambda| . d(e_m, H_{m-1}) \\ &\overset{(2)}{\geq} \frac{|\lambda|}{2} > 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $\{Ke_n\}_{n\geq 1}$ est sans s-suites convergentes. Ceci contredit la compacité de K, car $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une suite bornée.

Par conséquent, $a(K-\lambda I) < \infty$.

(iii) $R(K-\lambda I)$ fermé ?

A partir de (i), $\ker(K-\lambda I)$ est un s.e.v. de dimension finie de E.

En utilisant le point (2), $\ker(K-\lambda I)$ admet un supplémentaire topologique M dans E (S-D-T).

On a donc : $E = \ker(K-\lambda I) \oplus M$

Soit l'opérateur : $\begin{cases} T : M \longrightarrow E \\ x \longmapsto Tx = (K-\lambda I)x \end{cases}$.

Il est clair que T est linéaire borné du Banach M dans le Banach E, et T est injectif.

De plus, on a : $R(K-\lambda I) = \{(K-\lambda I)x : x \in E\}$
$= \{(K-\lambda I)x' : x' \in M\}$
$= R(T)$.

Il suffit de montrer que T est minoré (car si T est minoré entre 2 Banach, alors il est à image fermée).

Par l'absurde, supposons T non minoré.

Ceci est equivalent que l'opérateur linéaire :

$$\begin{cases} T^{-1} : \cancel{R(T)} \longrightarrow M \\ \quad Tx\ (x \in M) \longmapsto x \end{cases}$$ est non borné,

Il existe alors une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans M t-q.

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, & \|Tx_n\| = 1, \\ \forall n \geq 1, & \|x_n\| > n \end{cases}.$$

On pose, $z_n = \frac{1}{\|x_n\|} x_n$, pour $n \geq 1$.

On a alors :

(·) $\forall n \geq 1$, $\|z_n\| = 1$, $z_n \in M$.

(··) $(K - \lambda I) z_n = \frac{1}{\|x_n\|} (K - \lambda I) x_n \longrightarrow 0$.

K étant compact et $\{z_n\}_{n \geq 1}$ est une suite bornée dans M,

il existe alors une s-suite $\{u_n\}_{n \geq 1}$ de $\{z_n\}_{n \geq 1}$,

et il existe un vecteur $u \in E$ t-q. $Ku_n \longrightarrow u$.

Or $Ku_n = (K - \lambda I) u_n + \lambda u_n$, pour tout $n \geq 1$,

et $\lim (K - \lambda I) u_n = 0$, donc $\lim u_n = \frac{1}{\lambda} u$.

D'où $\lim Ku_n = \frac{1}{\lambda} Ku = u$.

Ceci montre que : $Ku = \lambda u$.

Donc : $u \in \ker(K-\lambda I) \cap M$.

Alors $u = 0$.

D'autre part, comme $\|u_n\| = 1$, pour tout $n \geq 1$,

et $u_n \longrightarrow \frac{1}{\lambda} u$, donc $\|u\| = |\lambda| \neq 0$.

Ceci est en contradiction avec $u = 0$.

Par conséquent, T est minoré, et donc

$R(T) = R(K-\lambda I)$ est fermé.

(iv) $d(K-\lambda I) < \infty$?

Par l'absurde, supposons $d(K-\lambda I) = \infty$.

On a donc :

$$\forall n \geq 0, \quad R(K-\lambda I)^n \supsetneq R(K-\lambda I)^{n+1} \quad (*).$$

Posons : $M = R(K-\lambda I)^n$, pour $n \geq 1$.

En utilisant la formule du binôme, pour $n \geq 1$.

$$(K-\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k K^{n-k} \cdot (-\lambda I)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k K^{n-k} + (-\lambda)^n I$$

$$= K_n - \mu_n I$$

où $K_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k K^{n-k}$, $\mu_n = (-1)^{n-1} \lambda^n$.

Donc, pour $n \geq 1$, K_n est compact, et $\mu_n \neq 0$.

En utilisant (iii), $R(K-\lambda I)^n$ est un fermé, pour tout $n \geq 1$. ~~Ceci montre que $R(K-\lambda I$~~

Posons $M_n = R(K-\lambda I)^n$, pour $n \geq 1$.

Comme $M_1 \supsetneq M_2$, M_2 est un sous-espace propre de M_1, il existe alors un vecteur $z_1 \in M_1$ t.q

$\|z_1\| = 1$, $d(z_1, M_2) \geq \frac{1}{2}$.

De même, comme M_3 est un sous-espace propre de M_2, il existe alors un vecteur $z_2 \in M$ t.q

$\|z_2\| = 1$, $d(z_2, M_3) \geq \frac{1}{2}$.

Donc, compte tenu de $(*)$, on peut construire une suite $\{z_n\}_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \ z_n \in M_n, \ \|z_n\| = 1, \\ \forall n \geq 1, \ d(z_n, M_{n+1}) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour chaque $n \geq 1$, on peut choisir $u_n \in E$ vérifiant : $(K-\lambda I)^n u_n = z_n$.

Soit $n, m \geq 1$ t.q. $m > n$. On a donc :

$$Kz_m - Kz_n = (K-\lambda I)z_m + \lambda z_m - (K-\lambda I)z_n - \lambda z_n$$

Posons $u = (K-\lambda I)z_m + \lambda z_m - (K-\lambda I)z_n$.

On a : $(K-\lambda I)z_m \in M_{m+1}$, donc $(K-\lambda I)z_m \in M_{n+1}$,

et $\lambda z_m \in M_m$, donc $\lambda z_m \in M_{n+1}$ (car $n+1 \leq m$)

et $(K-\lambda I)z_n \in M_{n+1}$. Alors $u \in M_{n+1}$.

D'où, on a :

$$\begin{aligned}\|Kz_m - Kz_n\| &= \|u - \lambda z_n\| \\ &= |\lambda| . \|z_n - \tfrac{1}{\lambda} u\| \\ &\geq |\lambda| \, d(z_n, M_{n+1}) \\ &\geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $\{Kz_n\}_{n\geq 1}$ est sans s-suites convergentes, et ceci contredit la compacité de K, car $\{z_n\}_{n\geq 1}$ est une suite bornée.

Par conséquent, $d(K-\lambda I) < \infty$.

(V) ? Supposons $\lambda \in \sigma(K)$ $(\lambda \neq 0)$.

(a) Montrons alors que λ est valeur propre de K ?

Par l'absurde, supposons $\ker(K-\lambda I) = \{0\}$.

On a donc $a(K-\lambda I) = 0$.

Et comme $d(K-\lambda I) < \infty$ (d'après (IV)),

alors $d(K-\lambda I) = a(K-\lambda I) = 0$.

Donc $K - \lambda I$ est inversible.

Ceci est en contradiction avec $\lambda \in \sigma(K)$.

Par conséquent, λ est valeur propre de K

(b) Montrons que λ est de valeur de multiplicité finie ?

On a $p = \dim \ker(K-\lambda I) < \infty$ (d'après (i)),

donc, λ est de valeur de multiplicité finie, qui est p.

(VI) $\forall r > 0$, $\text{Card}\{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq r\} < \infty$?

Par l'absurde, supposons (VI) faux.

Il existe alors $r > 0$ t.q.

$L_r = \{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq r\}$ est infini.

Donc chaque $\lambda \in L_r$ est valeur propre de K,

car $\lambda \in \sigma(K)$ et $\lambda \neq 0$ (en utilisant (V)).

On peut alors extraire de L une suite $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$

vérifiant :

(i) $\forall n, m \geq 1, \quad n \neq m \Rightarrow \lambda_n \neq \lambda_m$,

(ii) $\forall n \geq 1, \lambda_n \in \sigma(K)$,

(iii) $\forall n \geq 1, \quad |\lambda_n| \geq r$.

Pour chaque $n \geq 1$, il existe $x_n \in E \setminus \{0\}$, $Kx_n = \lambda_n x$.

En utilisant (i), alors $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre,

pour chaque $n \geq 1$ (Cours Algèbre linéaire).

Posons $G_n = sp\{x_1, \dots, x_n\}$, pour $n \geq 1$.

On a donc $G_n \subsetneq G_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$ (*).

Posons $z_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$. Donc $z_1 \in G_1$, $\|z_1\| = 1$.

Comme G_1 est un sous-espace propre de G_2,

alors il existe $z_2 \in G_2$, $\|z_2\| = 1$, $d(z_2, G_1) \geq \frac{1}{2}$.

De même, comme G_2 est un sous-espace propre de G_3, il existe $z_3 \in G_3$ t.q.

$\|z_3\| = 1$, $d(z_3, G_2) \geq \frac{1}{2}$.

A partir de (*), on peut alors construire une suite $\{z_n\}_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \; z_n \in G_n, \; \|z_n\| = 1 \\ \forall n \geq 1, \; d(z_n, G_{n+1}) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit $n, m \geq 1$ t.q. $m > n$. On a alors:

$Kz_m - Kz_n = (K - \lambda_m I)z_m + \lambda z_m - Kz_n$

Posons $u = Kz_n - (K - \lambda_m I)z_m$.

Comme $m - 1 \geq n$, alors $G_n \subseteq G_{m-1}$.

Or $z_n \in G_n$, donc $z_n \in G_{m-1}$.

Or $K(G_{m-1}) \subset G_{m-1}$ (pourquoi?),

donc $Kz_n \in G_{m-1}$.

D'autre part, comme $z_m \in sp\{x_m, G_{m-1}\}$, donc:

$z_m = \alpha_m x_m + y_m$, $\alpha_m \in \mathbb{K}$, $y_m \in G_{m-1}$.

Alors, on a:

$$(K-\lambda_m I) z_m = \alpha_m (K-\lambda_m I) x_m + K y_m - \lambda_m y_m .$$

On a: $(K-\lambda_m I) x_m = 0$, $K y_m \in G_{m-1}$,

Donc $(K-\lambda_m I) z_m = K y_m - \lambda_m y_m \in G_{m-1}$.

Alors $u \in G_{m-1}$, ceci donne:

$$\|K z_m - K z_n\| = \|\lambda z_m - u\|$$
$$= |\lambda| . \|z_m - \tfrac{1}{\lambda} u\|$$
$$\geq |\lambda| \, d(z_m, G_{m-1})$$
$$\geq \frac{|\lambda|}{2} > 0 .$$

Donc la suite $\{K z_n\}_{n\geq 1}$ est sans s-suites convergentes, ceci contredit la compacité de K, car $\{z_n\}_{n\geq 1}$ est une suite bornée.

<u>Corollaire 1</u>: Soit $K \in B(E)$, avec K compact. Il y a trois possibilités pour $\sigma(K)$:

(1) $\sigma(K) = \{0\}$,

(2) $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres non nulles de K,

(3) $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n ; n \geq 1\}$,

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont des valeurs propres de K non nulles et vérifiant $\lambda_n \neq \lambda_m$, pour $n \neq m$.

<u>Preuve:</u> K étant compact, E de dim. infinie, alors $0 \in \sigma(K)$.

Posons $\sigma_n = \{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \geq 1$.

On a donc $\sigma(K) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$.

En vertu de (vi) du point (6), chaque σ_n est fini, pour tout $n \geq 1$.

Donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ est ~~au plus~~ soit fini, soit dénombrable.

Ceci prouve Corollaire 1.

<u>Corollaire 2</u> : Soit K un compact de $B(E)$ vérifiant la condition (3) du Corollaire 1.

Alors $\lim \lambda_n = 0$.

<u>Preuve</u>: Posons $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 1\}$

t.q : $\lambda_n \neq 0$, pour tout $n \geq 1$,

et $\lambda_n \neq \lambda_m$, pour $n \neq m$.

Montrons $\lim \lambda_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $L_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$.

(•) Si $L_\varepsilon = \phi$, prendre $N = 1$, et on a :

$\forall n \geq 1$, $|\lambda_n| < \varepsilon$.

(••) Si $L_\varepsilon \neq \phi$, prendre $N = \max\{n \geq 1, \lambda_n \in L_\varepsilon\}$

Soit $n > N$. Donc $\lambda_n \notin L_\varepsilon$, et $\lambda_n \in \sigma(K)$.

D'où $|\lambda_n| < \varepsilon$.

Ceci montre que $\lim \lambda_n = 0$.

<u>Remarque</u>: Si K est un compact de $B(E)$ à spectre infini, alors 0 est l'unique point d'accumulation de $\sigma(K)$